

- Chimie -**I)) Suivre cinétique par mesure de volume de gaz :****1 - Expression de l'avancement x de la réaction chimique :**

Equation de la réaction		$\text{CaCO}_3(s) + 2.\text{H}_3\text{O}^+(aq) \rightarrow \text{Ca}^{2+}(aq) + \text{CO}_2(g) + 3\text{H}_2\text{O}(l)$				
Etat du système	Avancement $x(\text{mol})$	Quantités de matière (mol)				
Etat initial	0	n_0	en excès	0	0	0
E. intermédiaire	x	$n_0 - x$	en excès	x	x	x

D'après le tableau, on a : $n(\text{CO}_2) = x$

D'après l'équation d'état d'un gaz parfait : $p \cdot V(\text{CO}_2) = n(\text{CO}_2) \cdot R \cdot T$

Des deux relations on aura :

$$x = \frac{p}{RT} \cdot V(\text{CO}_2)$$

A.N : $x = \frac{1,02 \cdot 10^5}{8,31 \times 298} \cdot V(\text{CO}_2)$ on trouve : $\underbrace{x}_{\text{mol}} = 41,2 \cdot \underbrace{V(\text{CO}_2)}_{\text{m}^3}$

2 - Détermination graphique de $t_{1/2}$ de la réaction chimique :

D'après la définition : $x(t_{1/2}) = \frac{x_{\max}}{2}$ (1)

D'après la relation établie précédemment :

$$x(t_{1/2}) = 41,2 \cdot V(\text{CO}_2)_{1/2} \quad (2)$$

$$\text{et } x_{\max} = 41,2 \cdot V(\text{CO}_2)_{\max} \quad (3)$$

En portant les relations (2) et (3) dans (1) :

on peut écrire :

$$41,2 \cdot V(\text{CO}_2)_{1/2} = \frac{41,2 \cdot V(\text{CO}_2)_{\max}}{2}$$

ou bien :

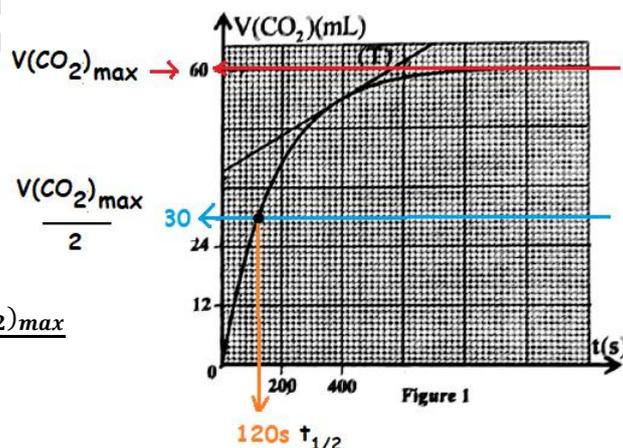
$$V(\text{CO}_2)_{1/2} = \frac{V(\text{CO}_2)_{\max}}{2}$$

* Graphiquement : $V(\text{CO}_2)_{\max} = 60 \text{ mL}$

alors : $V(\text{CO}_2)_{1/2} = 60/2 = 30 \text{ mL}$

* Par projection, on obtient la valeur du temps de demi - réaction :

$$t_{1/2} = 120\text{s} = 2\text{min}$$

**3 - La vitesse volumique de la réaction chimique à $t_1 = 390\text{s}$:**

Par définition : $v(t) = \frac{1}{V_S} \times \frac{dx}{dt}$

Or on sait que : $x = 41,2 \cdot V(\text{CO}_2)$

Donc, on en déduit que : $v(t) = \frac{41,2}{V_S} \times \frac{dV(\text{CO}_2)}{dt}$

Ou bien la relation approchée : $v(t) = \frac{41,2}{V_S} \times \frac{\Delta V(\text{CO}_2)}{\Delta t}$

A.N :

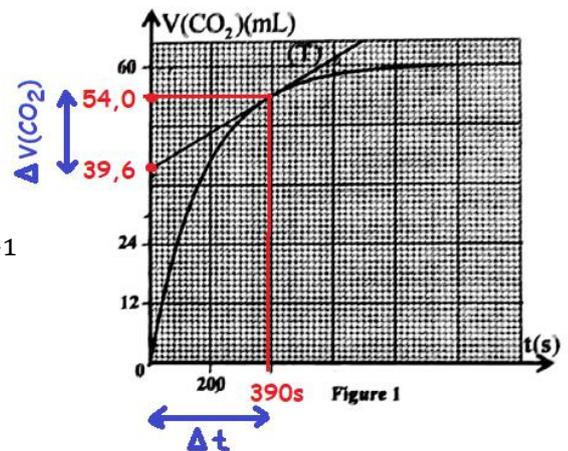
* $V_S = 100\text{mL}$

* Graphiquement, à $t_1 = 390\text{s}$:

$$\frac{\Delta V(\text{CO}_2)}{\Delta t} = \frac{54,0 - 39,6}{390 - 0} = 3,69 \cdot 10^{-2} \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$$

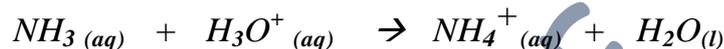
Alors : $v(t_1) \approx \frac{41,2(\text{mol} \cdot \text{m}^{-3})}{100 \text{ mL}} \times 3,69 \cdot 10^{-2} \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$

On trouve : $v(t_1) \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$



II)) Dosage d'une solution aqueuse d'ammoniac par une solution aqueuse d'acide chlorhydrique :

1- Equation du dosage :



2- Le volume V_{AE} à l'équivalence :

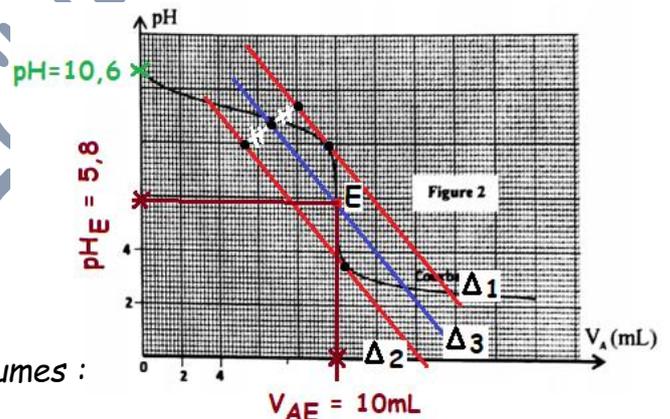
On trace deux droites Δ_1 et Δ_2 tangentes à la courbe (1) :

On trace une troisième droite Δ_3 équidistante des deux autres :

Cette droite Δ_3 coupe la courbe (1) au point d'équivalence E.

On trouve après la projection de E sur l'axe des volumes :

$$V_{AE} = 10 \text{ mL}$$



3- Montrons que la concentration molaire en ammoniac est $C_D = 1\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

Déterminons d'abord la concentration molaire C_B en ammoniac titrée :

Appliquons la relation à l'équivalence : $C_B \cdot V_B = C_A \cdot V_{AE}$

On en déduit l'expression : $C_B = C_A \times \frac{V_{AE}}{V_B}$

Or la solution titrée d'ammoniac est 100 fois diluée, alors $C_D = 100 \cdot C_B$

Finalemnt : $C_D = 100 \cdot C_A \times \frac{V_{AE}}{V_B}$

A.N : $C_D = 100 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \times \frac{10}{20}$

On trouve : $C_D = 100 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \times \frac{10}{20}$

Donc : $C_D = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

4.1 - Equation de la réaction de l'ammoniac avec l'eau :**4.2- pH de la solution (S1) :**

D'après la courbe (1) ; pH de la solution (S₁) représente l'ordonnée du point de cette courbe d'abscisse V_A = 0 mL.

Graphiquement on trouve : **pH = 10,6** (Voir la figure 1 à la page 2)

4.3- Détermination des concentrations molaires : [NH₄⁺] et [NH₃]

Du tableau d'avancement de cette réaction, on peut écrire :

$$* [\text{NH}_4^+] = [\text{HO}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} ; \text{ or } [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

$$\text{Alors : } [\text{NH}_4^+] = K_e \cdot 10^{+\text{pH}}$$

$$* [\text{NH}_3] = \frac{n(\text{NH}_3)}{V_S} = \frac{n_0(\text{NH}_3) - x}{V_S} = \frac{n_0(\text{NH}_3)}{V_S} - \frac{x}{V_S} = C_1 - [\text{NH}_4^+]$$

$$\text{D'où : } [\text{NH}_3] = C_1 - K_e \cdot 10^{+\text{pH}}$$

$$\text{A.N : } * [\text{NH}_4^+] = 10^{-14} \cdot 10^{+10,6}$$

$$\text{On trouve : } [\text{NH}_4^+] = 3,98 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$* [\text{NH}_3] = 10^{-2} - 10^{-14} \cdot 10^{+10,6}$$

$$\text{On trouve : } [\text{NH}_3] = 9,60 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

4.4- Déduction de la valeur de la constante de : pK_A(NH₄⁺/NH₃)

$$\text{On sait que : } \text{pH} = \text{pK}_A + \log\left(\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}\right)$$

$$\text{On en déduit l'expression : } \text{pK}_A = \text{pH} - \log\left(\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}\right)$$

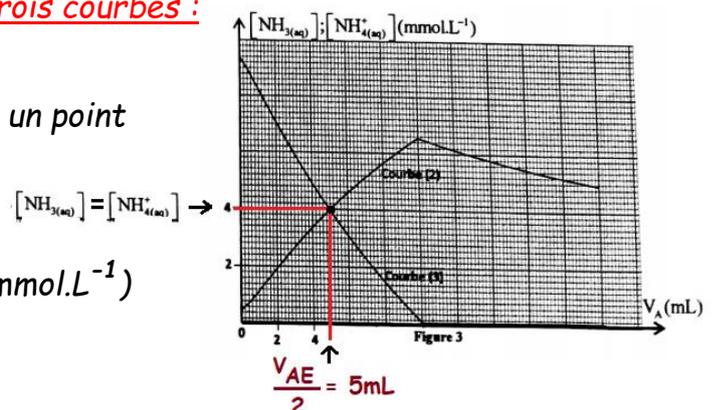
$$\text{A.N : } \text{pK}_A = 10,6 - \log\left(\frac{9,60 \cdot 10^{-3}}{3,98 \cdot 10^{-4}}\right)$$

$$\text{On trouve : } \text{pK}_A = 9,2$$

5 - La valeur de pK_A(NH₄⁺/NH₃) à partir des trois courbes :*** Des deux courbes (2) et (3) :**

Le point d'intersection de ces deux courbes est un point remarquable, de coordonnées :

$$(V_{A(1/2)} = \frac{V_{AE}}{2} = 5 \text{ mL} ; [\text{NH}_3]_{1/2} = [\text{NH}_4^+]_{1/2} = 4 \text{ mmol.L}^{-1})$$



* De la courbe (1) :

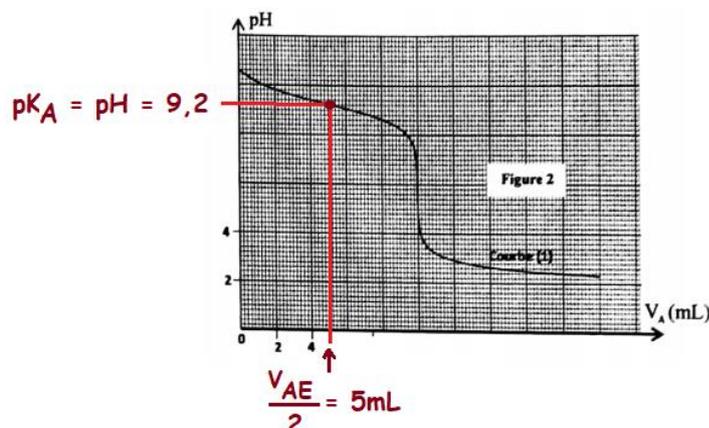
A la demi-équivalence de la réaction du dosage

$$V_{A(1/2)} = \frac{V_{AE}}{2} = 5\text{mL}$$

Et On sait que : $\text{pH}_{1/2} = \text{pK}_A + \log\left(\frac{[\text{NH}_3]_{1/2}}{[\text{NH}_4^+]_{1/2}}\right)$

Mais : $[\text{NH}_3]_{1/2} = [\text{NH}_4^+]_{1/2}$

Alors : $\text{pK}_A = \text{pH}_{1/2} = 9,2$

Remarque : (Démonstration théorique)

On va montrer que : $[\text{NH}_3]_{1/2} = [\text{NH}_4^+]_{1/2}$; à la demi - équivalence :

* Le volume versé est : $V_{A(1/2)} = \frac{V_{AE}}{2}$

* $[\text{NH}_3]_{1/2} = \frac{n(\text{NH}_3)_{1/2}}{V_A + V_B} = \frac{C_B \cdot V_B - X_{1/2}}{V_A + V_B}$

* $[\text{NH}_4^+]_{1/2} = \frac{n(\text{NH}_4^+)_{1/2}}{V_A + V_B} = \frac{X_{1/2}}{V_A + V_B}$

* H_3O^+ est le réactif limitant : $n(\text{H}_3\text{O}^+)_{1/2} = C_A \cdot V_{A(1/2)} - X_{1/2} = 0$

C'est-à-dire : $X_{1/2} = C_A \cdot V_{A(1/2)}$; ou bien : $X_{1/2} = C_A \cdot \frac{V_{AE}}{2}$

Les expressions des concentrations $[\text{NH}_3]$ et $[\text{NH}_4^+]$ deviennent :

* $[\text{NH}_3]_{1/2} = \frac{C_B \cdot V_B - X_{1/2}}{V_{A(1/2)} + V_B} = \frac{C_B \cdot V_B - \frac{C_A \cdot V_{AE}}{2}}{V_{A(1/2)} + V_B}$

* $[\text{NH}_4^+]_{1/2} = \frac{X_{1/2}}{V_{A(1/2)} + V_B} = \frac{\frac{C_A \cdot V_{AE}}{2}}{V_{A(1/2)} + V_B}$

Or à l'équivalence on a la relation : $C_B \cdot V_B = C_A \cdot V_{AE}$

Les expressions s'écrivent de la façon suivante :

* $[\text{NH}_3]_{1/2} = \frac{C_A \cdot V_{AE} - \frac{C_A \cdot V_{AE}}{2}}{V_{A(1/2)} + V_B} = \frac{\frac{C_A \cdot V_{AE}}{2}}{V_{A(1/2)} + V_B}$

* $[\text{NH}_4^+]_{1/2} = \frac{\frac{C_A \cdot V_{AE}}{2}}{V_{A(1/2)} + V_B}$

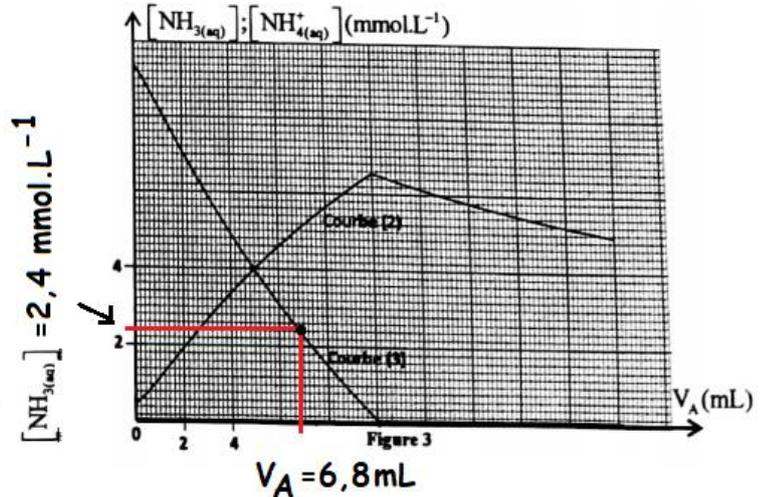
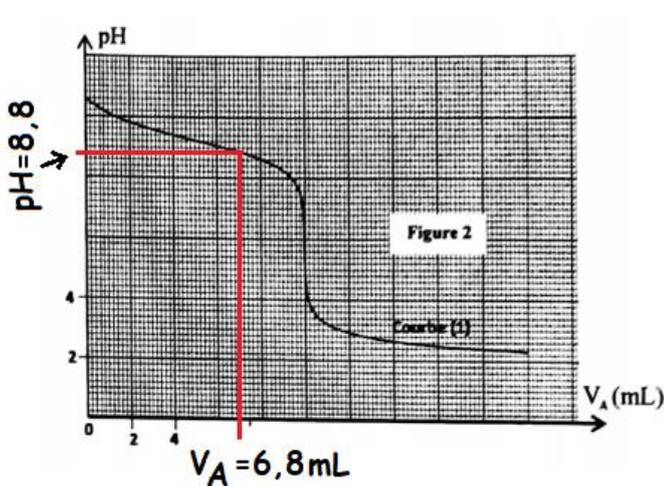
On voit bien que : $[\text{NH}_3]_{1/2} = [\text{NH}_4^+]_{1/2}$

Finalement : $\text{pK}_A = \text{pH}_{1/2} = 9,2$

6.1 - La courbe qui correspond à l'évolution de $[\text{NH}_3]$ en fonction du volume versé V_A :

L'espèce NH_3 est un réactif, en se consommant, sa concentration molaire $[\text{NH}_3]$ diminue ;

Et cela correspond à la courbe (3).

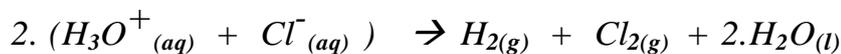
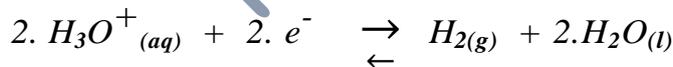
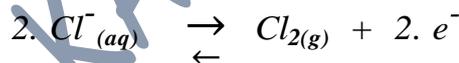
6.2 - Recherche de $[NH_3]$ lorsque $pH = 8,8$:

En utilisant la courbe (1) et puis la courbe (3), on arrive à déterminer la valeur de la concentration voulue :

$$[NH_3] = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

III)) Electrolyse d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique :**1 - Equation de la réaction au niveau de l'anode :**

Au niveau de l'anode, il y a oxydation de l'espèce $Cl_{(aq)}^-$ selon la demi-équation :

**2 - Equation bilan de la réaction de cette électrolyse :****3 - Valeur de pH de la solution à $t = 30$ min :**

On sait que : $pH = -\log[H_3O^+]$

Cherchons l'expression de la concentration molaire $[H_3O^+]$:

A l'instant t , le tableau d'avancement nous permet d'écrire :

$$[H_3O^+] = \frac{n(H_3O^+)}{V_0} = \frac{C_0 \cdot V_0 - 2 \cdot X}{V_0} \quad (1)$$

Or la quantité de matière de électrons qui ont circulé dans le circuit pendant la durée $\Delta t = t - 0$

$$\text{est : } n(e^-) = 2 \cdot x \quad (2)$$

$$\text{Et la quantité d'électricité transportée par ces électrons est : } Q = I \cdot \Delta t = n(e^-) \cdot F \quad (3)$$

En combinant ces trois relations, on aboutit à l'expression suivante : $[H_3O^+] = \frac{C_0 \cdot V_0 - \frac{I \times \Delta t}{F}}{V_0}$

Finalemment : $pH = -\log \left(C_0 - \frac{I \times t}{F \times V_0} \right)$

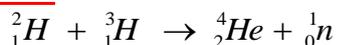
A.N : $pH = -\log \left(5 \cdot 10^{-2} - \frac{0,50 \times 30 \times 60}{9,65 \cdot 10^4 \times 500 \cdot 10^{-3}} \right)$

On trouve : $pH = 1,5$

-Physique-

Ex : TRANSFORMATIONS NUCLEAIRES

1- Equation de la réaction de fusion :



2- Les affirmations :

a) faux : L'énergie de liaison est : $E_\ell({}^A_ZX) = \Delta m({}^A_ZX) \times c^2$

b) vraie : $\Delta m({}^A_ZX) = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m({}^A_ZX) > 0 \Leftrightarrow m({}^A_ZX) < Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n$

c) faux : La fission concerne les noyaux lourds de nombre de masse $A > 195$

d) vraie : réaction entre deux noyaux légers qui sont 8_4Be et 4_2He .

e) faux : La fission est une réaction nucléaire provoquée. (Bombardement d'un noyau lourd par des neutrons)

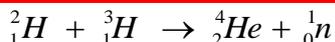
3.1- Energie de liaison $E_\ell({}^4_2He)$:

C'est l'énergie qu'il faut fournir au noyau de l'hélium pour séparer ses 4 nucléons :

D'après le diagramme d'énergie : $E_\ell({}^4_2He) = E_1 - E_3$

A.N : $E_\ell({}^4_2He) = (4,69526 - 4,66697) \cdot 10^3 = 28,29 MeV$

3.2- Energie libérée par la réaction de fusion :



On sait que : $\Delta E = E_\ell({}^2_1H) + E_\ell({}^3_1H) - E_\ell({}^4_2He)$

Et d'après le diagramme d'énergie : $E_\ell({}^2_1H) + E_\ell({}^3_1H) = E_1 - E_2$

Finalemment : $|\Delta E| = |E_1 - E_2 - E_\ell({}^4_2He)|$

A.N : $|\Delta E| = |(4,69526 - 4,68456) \cdot 10^3 - 28,29| = 17,59 MeV$

4 - Energie libérée par la réaction de fusion d'une mole de chaque réactif :

Le nombre de noyaux dans une mole est : $N = n \times N_A = N_A$ puisque $n=1mol$

D'où l'énergie libérée est : $|\Delta' E| = N_A \times |\Delta E|$

A.N : $|\Delta' E| = 6,022 \cdot 10^{23} \times 17,59 \approx 1,06 \cdot 10^{25} MeV$

5 - Recherche du nombre n de tonnes de pétrole à brûler :

On a : 1 tep = $4,2 \cdot 10^{10}$ J (une tonne d'équivalent pétrole)

Alors n (tep) correspond à l'énergie : $|\Delta' E| = 1,06 \cdot 10^{25} \text{ MeV} = 1,06 \cdot 10^{25} \times 1,6022 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,698 \cdot 10^{12} \text{ J}$

$$\text{C'est-à-dire : } n = \frac{|\Delta' E|}{4,2 \cdot 10^{10}} = \frac{1,698 \cdot 10^{12}}{4,2 \cdot 10^{10}}$$

On trouve : $n = 40,4$ (tonnes)

Ex : ELECTRICITE**1- Charge d'un condensateur-Oscillations libres d'un circuit RLC série :****1.1- Equation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$:**

- La loi d'additivité des tensions : $u_R(t) + u_C(t) = E$ (*)

- La loi d'Ohm :

$$u_R(t) = R_0 \cdot i(t) = R_0 \cdot \frac{dq(t)}{dt} = R_0 \cdot \frac{d(C_{\text{éq}} \cdot u_C(t))}{dt} = R_0 \cdot C_{\text{éq}} \cdot \frac{d(u_C(t))}{dt}$$

$$\text{avec } C_{\text{éq}} = C + C = 2 \cdot C$$

- Finalement on obtient : $2R_0 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

1.2- Valeur de l'intensité du courant $i(t=0^+)$:

Juste après la fermeture du circuit on a : $u_C(t=0^+) = 0$;

La relation (*) va s'écrire : $R_0 \cdot i(t=0^+) + u_C(t=0^+) = E$

Finalement : $i(t=0^+) = \frac{E}{R_0}$ avec $E = \lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = 6V$ (fig 2)

$$\text{A.N : } i(t=0^+) = \frac{6}{10^3} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

1.3- Vérification de $C = 120 \text{ nF}$

- On sait que la constante du temps du circuit RC est :

$$\tau = R_0 \cdot C_{\text{éq}} = 2 \cdot R_0 C$$

- D'après la courbe de $u_C(t)$ à la figure 2 ; on trouve : $\tau = 0,24 \text{ ms}$

$$\text{- On aura alors : } C = \frac{\tau}{2 \cdot R_0} = \frac{0,24 \cdot 10^{-3}}{2 \times 10^3} = 120 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 120 \text{ nF}$$

1.4.1- Equation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur équivalent :

- La loi d'additivité des tensions : $u_L(t) = -u_R(t) - u_C(t)$

Qui peut s'écrire : $u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$ (*)

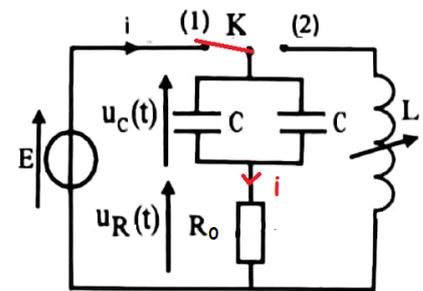


Figure 1

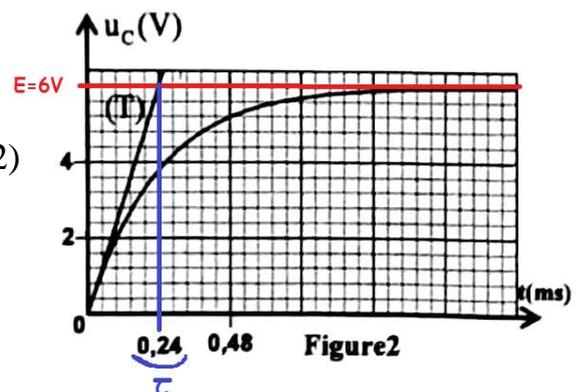


Figure 2

- La loi d'Ohm :

$$u_R = R_0 \cdot i = R_0 \cdot \frac{dq}{dt} \quad ; \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} \quad ; \quad u_C = \frac{q}{C_{\text{éq}}}$$

- La relation (*) devient : $L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R_0 \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_{\text{éq}}} = 0$

- Finalement on obtient : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R_0}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2LC} \cdot q = 0$

1.4.2- Expression de $\frac{dE_t}{dt}$:

- L'énergie totale du circuit RLC : $E_t = \underbrace{E_m(t)}_{\text{énergie magnétique}} + \underbrace{E_e(t)}_{\text{énergie électrique}}$

Elle peut s'écrire : $E_t = \frac{1}{2} L \cdot i(t)^2 + \frac{1}{2} C_{\text{éq}} \cdot u_c(t)^2$

Ou bien : $E_t = \frac{1}{2} L \cdot \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2 C_{\text{éq}}} \cdot (q)^2$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{1}{2} L \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2 C_{\text{éq}}} \cdot \frac{d}{dt} [q(t)^2]$$

On aura : $\frac{dE_t}{dt} = \frac{1}{2} L \cdot \left[2 \times \frac{dq}{dt} \times \frac{d^2q}{dt^2} \right] + \frac{1}{2 C_{\text{éq}}} \cdot \left[2 \times q \times \frac{dq}{dt} \right]$

Qui s'écrira : $\frac{dE_t}{dt} = \left(L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C_{\text{éq}}} \cdot q \right) \cdot \frac{dq}{dt} = L \cdot \left(\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L C_{\text{éq}}} \cdot q \right) \cdot \frac{dq}{dt}$

Or on a établi que : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R_0}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L C_{\text{éq}}} \cdot q = 0$

ou bien ce qui donne : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L C_{\text{éq}}} \cdot q = - \frac{R_0}{L} \cdot \frac{dq}{dt}$

Donc :

$$\frac{dE_t}{dt} = L \cdot \left(\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L C_{\text{éq}}} \cdot q \right) \cdot \frac{dq}{dt} = L \cdot \left(- \frac{R_0}{L} \cdot \frac{dq}{dt} \right) \cdot \frac{dq}{dt} = - R_0 \cdot \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$$

$$- \frac{R_0}{L} \cdot \frac{dq}{dt}$$

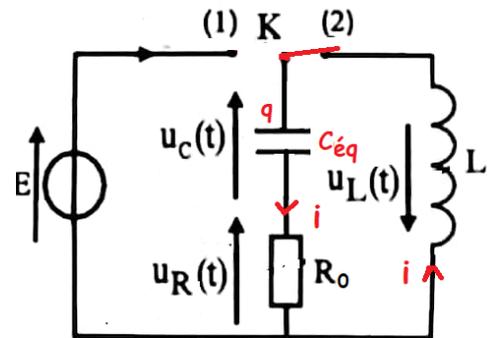


Figure 1

Enfinement on trouve que : $\frac{dE_t}{dt} = -R_0 \cdot i(t)^2 < 0 \Rightarrow$ décroissance de E_t

2- Oscillateur RLC série en régime forcé :

2.1- Fréquence N_0 :

On applique la formule : $N_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$

A.N : $N_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{2,5 \cdot 10^{-3} \times 120 \cdot 10^{-9}}} = 9189 \text{ Hz} \approx 9,19 \text{ KHz}$

2.2- * N_1 et N_2 délimitent la bande passante :

Pour cela vérifions qu'en ces deux fréquences ; l'intensité du courant I_{eff} vaut $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{0,71 \text{ A}}{\sqrt{2}} \approx 0,50 \text{ A}$$

*** Facteur de qualité Q :**

On applique la formule : $Q = \frac{N_0}{N_2 - N_1}$

A.N : $Q = \frac{9,19}{12,90 - 6,54} \approx 1,44$

2.3- Calcul de la résistance R_1 :

A la résonance électrique on a : $R_1 = \frac{U_{\text{eff}}}{I_0} = \frac{U_m}{I_0 \cdot \sqrt{2}}$

A.N : $R_1 = \frac{100}{0,71 \cdot \sqrt{2}} \approx 100 \Omega$ ($0,71 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$)

2.4- Calcul de la puissance moyenne dissipée par effet Joule :

A la résonance électrique, la puissance moyenne P_{moy} est :

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_0 \cdot \cos(\varphi) \quad \text{avec} \quad \cos(\varphi) = 1 \quad \text{et} \quad U_{\text{eff}} = R_1 \cdot I_0$$

Alors : $P_{\text{moy}} = R_1 \cdot I_0^2$

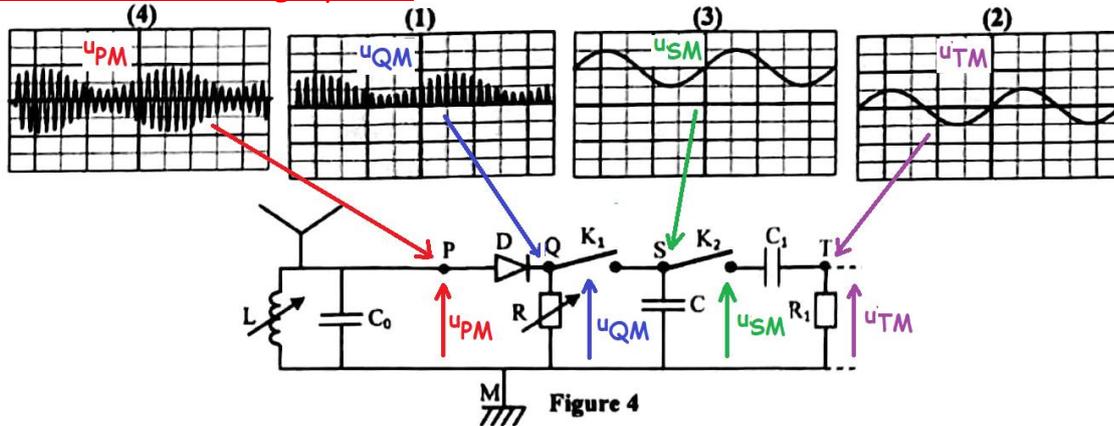
A.N : $P_{\text{moy}} = 100 \times 0,71^2 \approx 50 \text{ W}$

3- Réception d'une onde hertzienne :

3.1- Démoduler un signal :

La démodulation consiste à récupérer le signal informatif modulant qui est contenu dans la partie supérieure (ou inférieure) de l'enveloppe du signal modulé en amplitude.

3.2- Identification des graphes :



- Le graphe (1) correspond à la tension $u_{QM}(t)$, car en traversant la diode, celle-ci élimine la partie négative du signal modulé en amplitude (Voir le graphe (4))

- Le graphe (2) correspond à la tension $u_{TM}(t)$, car c'est le signal informatif obtenu par élimination de la porteuse au point S, et par élimination de la tension de décalage au point T.

Ex : MECANIQUE

Partie1 : Etude de la chute d'une bille :

1- Equation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$:

- Système à étudier : {la bille(m)} ;

- Repère d'étude : $R(O ; \vec{K})$

- Bilan des forces :

* Le poids de la bille : $\vec{P} = mg \cdot \vec{K}$

* La résistance de l'air : $\vec{R} = -\lambda v \cdot \vec{K}$ ($\vec{v} = v \cdot \vec{K}$)

- On applique la 2^{ème} loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$

- On projette cette relation vectorielle sur l'axe Oz descendant :

$$+P - R = m \cdot a_z \quad \text{Ou bien} \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - \lambda \cdot v$$

Finalement l'équation différentielle est : $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} \cdot v = g$

2- Valeur de la constante λ :

Au régime permanent :

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{et} \quad (v)_{t \rightarrow \infty} = v_{lim} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (figure2)}$$

Donc l'équation différentielle devient :

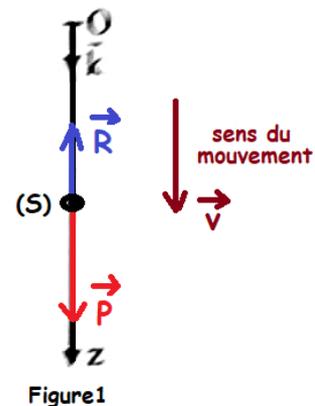


Figure1

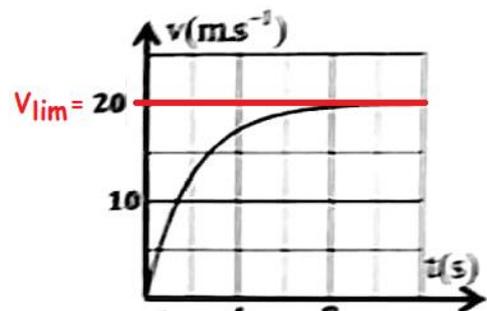


Figure 2

$$0 + \frac{\lambda}{m} \cdot v_{lim} = g \Leftrightarrow \lambda = \frac{m \cdot g}{v_{lim}}$$

$$A.N : \lambda = \frac{0,1 \times 10}{20} = 0,05 \text{ Kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

3- Comparaison des deux intensités P et R :

- Pendant la phase du régime transitoire : P est supérieure à R ($P > R$)

- Pendant la phase du régime permanent : P est égale à R ($P = R$)

4- Tracé de l'allure de la courbe représentative de la vitesse v(t) :

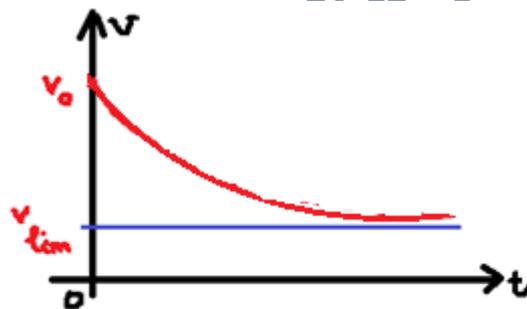
La bille est lancée vers le bas à la vitesse $v_0 > v_{lim}$

La solution de l'équation différentielle est de la forme : $v(t) = A + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

La vitesse limite $v_{lim} = \frac{m \cdot g}{\lambda}$ ne dépend pas de la vitesse initiale v_0 .

La vitesse est une fonction décroissante de v_0 à v_{lim} .

Rmq : On peut montrer que $v(t) = v_{lim} + (v_0 - v_{lim}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$



Partie 2 : Etude du mouvement d'un oscillateur :

1- Equation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire $\theta(t)$:

- Système à étudier : {la Tige OA (m)} ;

- Repère d'étude $(O; \vec{i}; \vec{j})$ supposé galiléen ;

- Bilan des forces :

* Le poids de la tige (OA) : \vec{P}

* La réaction de l'axe de rotation : \vec{R}_Δ

* Le couple de torsion de moment : $M_\Delta = -C \cdot \theta$

- On applique la relation fondamentale de la dynamique : $M(\vec{P}) + M(\vec{R}_\Delta) + M_\Delta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$ (*)

- Le moment du poids \vec{P} est : $M(\vec{P}) = +mg\ell \sin(\theta) \approx +mg\ell \cdot \theta$

- Le moment $M(\vec{R}_\Delta)$ est nul, car la direction de la force \vec{R}_Δ rencontre l'axe de rotation Δ .

- La relation (*) devient : $mg\ell.\theta - C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$

Ou bien :
$$\ddot{\theta} + \frac{C - mg\ell}{J_\Delta}.\theta = 0$$

2.1 - Expression de l'énergie potentielle totale de l'oscillateur :

- On sait que : $E_p = E_{pp} + E_{pt}$

- L'énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = m.g.(y - y_0)$; or $E_{pp}(y=0)=0 \Rightarrow y_0=0$

Alors l'expression devient : $E_{pp} = m.g.y = m.g.\ell.\cos(\theta) = m.g.\ell.\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$

- L'énergie potentielle de torsion :

$E_{pt} = \frac{1}{2}.C.(\theta - 0)^2 + Cte$; or si $\theta = 0$: $E_{pt} = 0$ donc $Cte = 0$

Alors l'expression devient : $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2$

- Finalement l'expression de l'énergie potentielle totale sera :

$E_{pp} = m.g.\ell.\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{1}{2}.C.\theta^2 \Leftrightarrow E_{pp} = m.g.\ell + \frac{1}{2}.(C - m.g.\ell).\theta^2$

2.2 - Equation différentielle de nouveau :

- L'énergie mécanique de l'oscillateur : $E_m = E_p + E_c$

Qui s'écrit : $E_m = m.g.\ell + \frac{1}{2}.(C - m.g.\ell).\theta^2 + \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$

- Cette énergie se conserve durant le mouvement de l'oscillateur ; alors $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(m.g.\ell + \frac{1}{2}.(C - m.g.\ell).\theta^2 + \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m.g.\ell) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.(C - m.g.\ell).\theta^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.(C - m.g.\ell).\frac{d}{dt}(\theta^2) + \frac{1}{2}.J_\Delta.\frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = 0$$

$$\Rightarrow (C - m.g.l).\theta.\frac{d\theta}{dt} + J_{\Delta}.\dot{\theta}.\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 \text{ ou bien } (C - m.g.l).\theta.\frac{d\theta}{dt} + J_{\Delta}.\frac{d\theta}{dt}.\ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \left[(C - m.g.l).\theta + J_{\Delta}.\ddot{\theta} \right] \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ ou bien } (C - m.g.l).\theta + J_{\Delta}.\ddot{\theta} = 0$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(C - m.g.l)}{J_{\Delta}}.\theta = 0$$

2.3.1- Expression de la période propre T_0 :

- La solution de l'équation différentielle est : $\theta(t) = \theta_m.\cos\left(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

- La dérivée est alors : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2.\pi}{T_0}.\theta_m.\sin\left(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

- La dérivée seconde est : $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2 \underbrace{\theta_m.\cos\left(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi\right)}_{=\theta} = -\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.\theta$

- On obtient l'équation suivante : $\ddot{\theta} + \left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.\theta = 0$

- Par identification avec l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{(C - m.g.l)}{J_{\Delta}}.\theta = 0$

On en déduit que : $\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{(C - m.g.l)}{J_{\Delta}}$

- Finalement l'expression voulue est : $T_0 = 2.\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C - m.g.l}}$

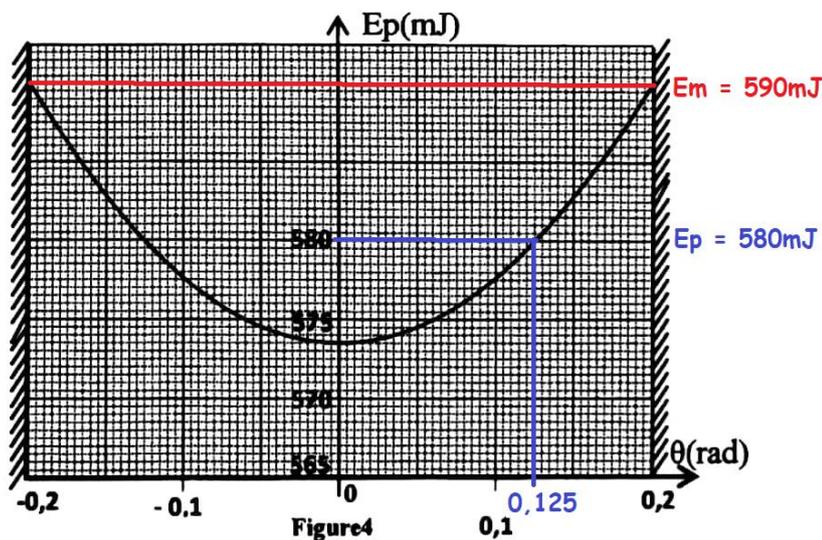
2.3.2- Calcul de g :

De la relation précédente : $\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{(C - m.g.l)}{J_{\Delta}} \Rightarrow C - m.g.l = J_{\Delta}.\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2$

Alors : $g = \frac{1}{m.l} \left[C - J_{\Delta}.\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2 \right]$

$$A.N : g = \frac{1}{0,1 \times 0,584} \left[1,4 - 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{1,1} \right)^2 \right] \approx 9,82 m.s^{-2}$$

2.4.1- Valeur de l'énergie mécanique :



A la position où l'abscisse angulaire est maximale $\theta = \theta_{\max} = 0,2 \text{ rad}$; l'énergie cinétique de l'oscillateur est nulle (car la vitesse angulaire est nulle $\dot{\theta} = 0$).

$$D'où : E_{mec} = E_p + \underbrace{E_c}_{=0} = E_{p_{\max}}$$

$$Et \text{ graphiquement : } E_{mec} = E_{p_{\max}} = 0,59 \text{ J}$$

2.4.2- Valeur de la valeur absolue de la vitesse angulaire lorsque : $\theta = 0,125 \text{ rad}$

$$On \text{ sait que : } E_c = E_m - E_p \Rightarrow \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}^2 = E_m - E_p \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2(E_m - E_p)}{J_{\Delta}}$$

$$Finalement : \left| \dot{\theta} \right| = \sqrt{\frac{2(E_m - E_p)}{J_{\Delta}}}$$

$$A.N : \left| \dot{\theta} \right| = \sqrt{\frac{2(590 - 580) \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-2}}} \approx 0,89 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$