- Chimie -

PartieI : La vitesse volumique de la réaction ; réactions acido-basique.

1- Le suivi de l'évolution temporelle de la concentration molaire des ions ClO^- :

1-1- Le tableau d'avancement de la réaction :

Equation de la réaction		$2.C\ell O^-(aq) \rightarrow 2.C\ell^-(aq) + O_2(g)$		
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)		
Etat initial	0	$C_0.V$	0	0
Etat final	x	$C_0.V - 2.x$	$2.x$	x
Etat final	x_{max}	$C_0.V - 2.x_{max}$	$2.x_{max}$	x_{max}

1-2- * Montrons qu'à l'instant t = $t_{1/2}$ on a : $\left[C\ell O^-\right] = \dfrac{C_0}{2}$

Par définition : $x(t_{1/2}) = \dfrac{x_m}{2}$

$$\left[C\ell O^-\right]_t = \frac{C_0.V - 2.x}{V} = C_0 - 2.\frac{x(t)}{V} \quad \text{alors} \quad \left[C\ell O^-\right]_{t_{1/2}} = C_0 - 2.\frac{x(t_{1/2})}{V} = C_0 - 2.\frac{(x_m/2)}{V} = C_0 - \frac{x_m}{V}$$

Or A la fin de la réaction : $C_0.V - 2.x_{max} = 0 \Rightarrow x_{max} = \dfrac{C_0.V}{2}$

Donc $\left[C\ell O^-\right]_{t_{1/2}} = C_0 - \dfrac{(C_0.V/2)}{V} = C_0 - \dfrac{C_0}{2}$

Finalement : $\left[C\ell O^-\right]_{t_{1/2}} = \dfrac{C_0}{2}$

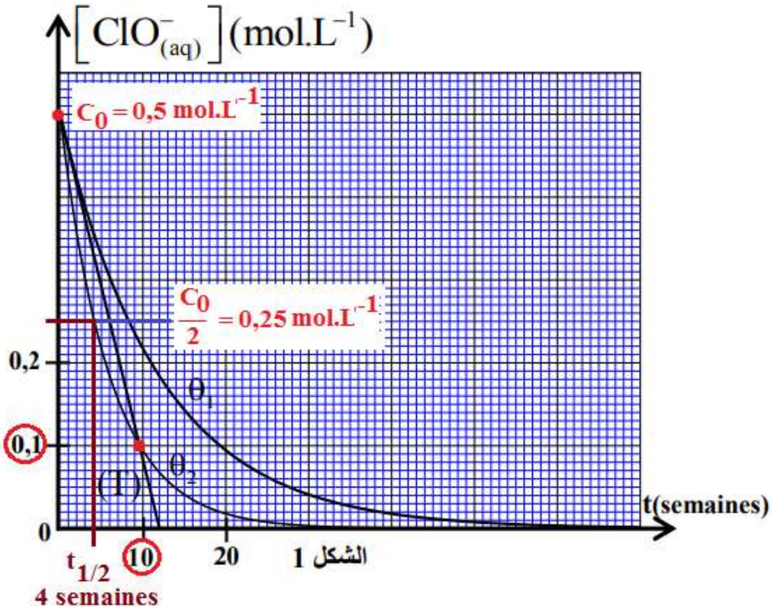
*** Déduction graphique de $t_{1/2}$:**

A t = 0 : $\left[C\ell O^-\right]_{(t=0)} = 0{,}5\, mo\ell.L^{-1}$

A t = $t_{1/2}$: $\left[C\ell O^-\right]_{(t=t_{1/2})} = 0{,}25\, mo\ell.L^{-1}$

Par projection on trouve :

$t_{1/2} = 4 semaines$



1-3- La vitesse volumique de la réaction à t = 0 et à θ = θ_1 :

On a : $v(t=0) = \dfrac{1}{V}.(\dfrac{dx}{dt})_{t=0}$ et avec l'approximation : $v(t=0) \approx \dfrac{1}{V}.\left[\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right]_{t=0}$

Or : $[C\ell O^-]_t = C_0 - 2.\frac{x}{V} \Rightarrow x = \frac{V}{2}.(C_0 - [C\ell O^-]_t)$

Par dérivation on obtient : $\frac{dx}{dt} = -\frac{V}{2}.\frac{d[C\ell O^-]}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{V}{2}.\frac{\Delta[C\ell O^-]}{\Delta t}$

Finalement l'expression de la vitesse peut s'écrire : $\underline{v(t=0) \approx -\frac{1}{2}.\frac{\Delta[C\ell O^-]}{\Delta t}}$

- **A.N :** $v(t=0) \approx -\frac{1}{2}.\frac{0{,}5-0{,}1}{0-10} = \underline{2.10^{-2} mo\ell.L^{-1}.semaine^{-1}}$

1-4 Comparaison de θ_1 et θ_2 :

La température est un facteur cinétique : plus θ grand plus **ClO^-** se décompose rapidement. En comparant les deux courbes, on remarque bien que la concentration des ions **ClO^-** décroit rapidement en fonction du temps pour le cas de la température θ_2 ; et ses ions disparaissent presque au bout de 30 semaines, contrairement à l'autre cas pour lequel ses ions ne disparaissent qu'après 60 semaines ; donc on conclue que la température θ_2 est supérieur à la température θ_1.

2- Etude de quelques solutions aqueuses où intervient le couple $HClO/ClO^-$:

2-1- Equation chimique de la réaction :

$$HC\ell O_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows C\ell O^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$$

2-2- Expression de la concentration molaire :

* La constante d'acidité : $K_A = \frac{[C\ell O^-]_{éq}[H_3O^+]_{éq}}{[HC\ell O]_{éq}}$

* D'après le tableau d'avancement de la réaction :

$$[C\ell O^-]_{éq} = [H_3O^+]_{éq} = 10^{-pH} \quad et \quad [HC\ell O]_{éq} = C - [H_3O^+]_{éq} = C - 10^{-pH}$$

Alors $K_A = \frac{10^{-2pH}}{C-10^{-pH}} \Rightarrow K_A.C - K_A.10^{-pH} = 10^{-2pH}$

Finalement : $\underline{C = 10^{-pH}.\left(1+\frac{10^{-pH}}{K_A}\right)}$

- **A.N :** $C = 10^{-5{,}5}.\left(1+\frac{10^{-5{,}5}}{5.10^{-8}}\right) \approx \underline{2.10^{-4} mo\ell.L^{-1}}$

2-3- Montrons que $\alpha(C\ell O^-) = \frac{K_A}{K_A + 10^{-pH}}$:

On sait que : $\alpha(C\ell O^-) = \frac{[C\ell O^-]}{[C\ell O^-]+[HC\ell O]}$

$$\Rightarrow \alpha(C\ell O^-) = \frac{1}{1 + \dfrac{[HC\ell O]}{[C\ell O^-]}} \quad \text{et} \quad K_A = \frac{[C\ell O^-][H_3O^+]}{[HC\ell O]} \quad \text{ou bien} \quad \frac{[HC\ell O]}{[C\ell O^-]} = \frac{[H_3O^+]}{K_A} = \frac{10^{-pH}}{K_A}$$

Donc : $\alpha(C\ell O^-) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{10^{-pH}}{K_A}}$ c.à.d $\underline{\alpha(C\ell O^-) = \dfrac{K_A}{K_A + 10^{-pH}}}$

2-4- Identification de la courbe :

La courbe (2) correspond à l'espèce acide $HC\ell O$ du couple $HC\ell O/C\ell O^-$

2-5- L'espèce qui prédomine pour le couple $HC\ell O/C\ell O^-$:

On a $pH = 5{,}5$ et d'après le graphe on trouve que le pourcentage de l'espèce acide est $\alpha(HC\ell O) \approx 98\%$; alors $HC\ell O$ est l'espèce prédominent.

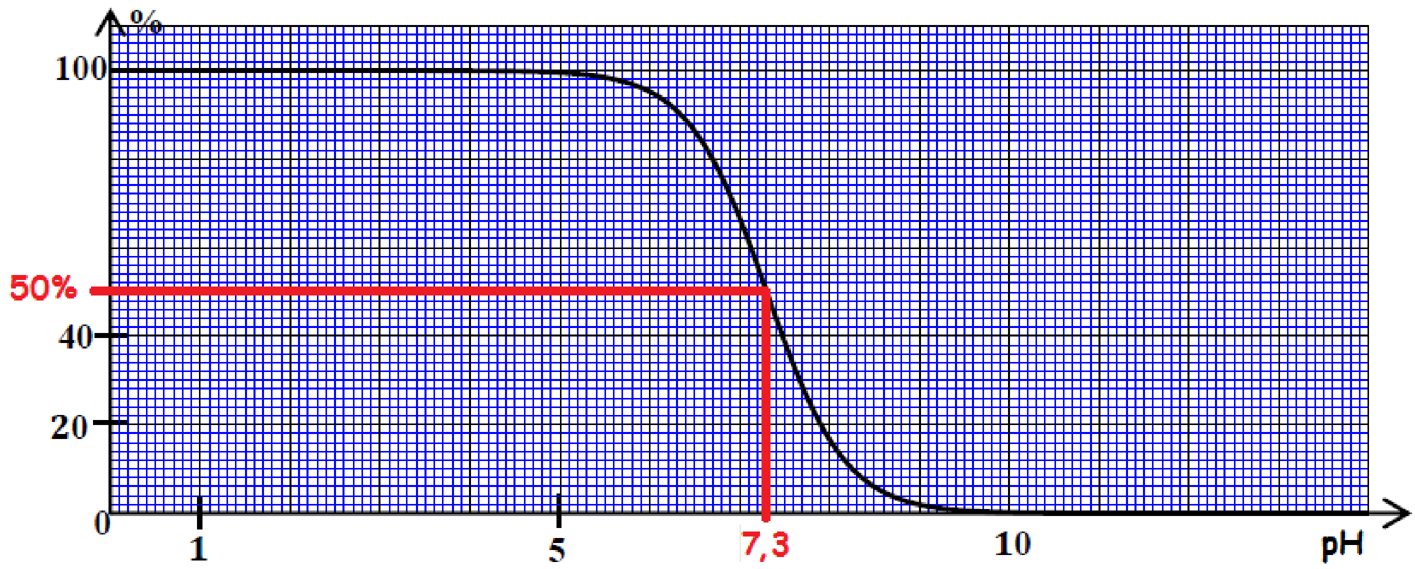
2-5-1- La valeur de la constante d'équilibre K :

* L'équation de la réaction : $HC\ell O_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow C\ell O^-_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}$

* L'expression de la constante d'équilibre : $\underline{K = \dfrac{K_A(HC\ell O/C\ell O^-)}{K_A(H_2O/HO^-)}}$

- **A.N :** $K = \dfrac{5.10^{-8}}{10^{-14}} = \underline{5.10^{6}}$

2-5-2- Calcul du porcentage : $\dfrac{[HC\ell O]_{eq}}{[C\ell O^-]_{éq}}$



* D'après le graphe : $\alpha(C\ell O^-) = 50\% = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

On sait que : $\alpha(C\ell O^-) = \frac{[C\ell O^-]}{[C\ell O^-]+[HC\ell O]} \Rightarrow \alpha(C\ell O^-) = \frac{1}{1+\frac{[HC\ell O]}{[C\ell O^-]}}$

$$\Rightarrow 1+\frac{[HC\ell O]}{[C\ell O^-]} = \frac{1}{\alpha(C\ell O^-)} \Rightarrow \frac{[HC\ell O]}{[C\ell O^-]} = \frac{1}{\alpha(C\ell O^-)} - 1 \Rightarrow \frac{[HC\ell O]}{[C\ell O^-]} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1$$

Finalement : $\frac{[HC\ell O]_{éq}}{[C\ell O^-]_{éq}} = 1$

Conclusion :

Dans ce mélange aucune espèce n'est prédominante pour le couple $HC\ell O / C\ell O^-$.
et de plus : $pK_A = pH = 7,3 \Rightarrow K_A = 10^{-7,3} = \underline{5.10^{-8}}$

PartieII : L'accumulateur Argent-Fer.

1- Equation bilan au cours du fonctionnement de l'accumulateur :

Au cours du fonctionnement de l'accumulateur il y a :
* Réduction des ions argent selon la demi-équation : $Ag^+_{(aq)} + e^- \rightleftarrows Ag_{(s)}$
* Oxydation des atomes de fer selon la demi-équation : $Fe_{(s)} \rightleftarrows Fe^{2+}_{(aq)} + 2.e^-$
* L'équation bilan sera : $Fe_{(s)} + 2.Ag^+_{(aq)} \rightleftarrows Fe^{2+}_{(aq)} + 2.Ag_{(s)}$

2- Montrons que : $\underbrace{[Ag^+_{(aq)}]_t}_{mo\ell.L^{-1}} = 0,2 - 1,55.10^{-5}.\underbrace{t}_{(s)}$

* Dressons le tableau d'avancement de cette réaction :

Equation de la réaction		$Fe_{(s)}$ +	$2.Ag^+_{(aq)}$ $\rightleftarrows$	$Fe^{2+}_{(aq)}$ +	$2.Ag_{(s)}$	Quantité des électrons
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)				
Etat initial	0	en excès	$C_1.V_1$	$C_1.V_1$	en excès	0
Etat intermédiaire	X	en excès	$C_1.V_1 - 2.x$	$C_1.V_1 + x$	en excès	$2.x$
Etat équivalence	X_f	en excès	$C_1.V_1 - 2.x_f$	$C_1.V_1 + x_f$	en excès	$2.x_f$

$$[Ag^+_{(aq)}]_t = \frac{n_t(Ag^+)}{V_1} = \frac{C_1.V_1 - 2.x}{V_1} \Rightarrow [Ag^+_{(aq)}]_t = C_1 - \frac{2}{V_1}.x$$

Or $La\ quantit\acute{e}\ d'\acute{e}lectricit\acute{e}\ est :\ Q = n(e-).F = I.\Delta t\ \ c.\grave{a}.d\ \ 2.x.F = I.t$ Donc $x = \dfrac{I.t}{2.F}$

$$\Rightarrow \left[Ag^{+}_{(aq)}\right]_t = C_1 - \frac{I}{F.V_1}.t$$

- **A.N :** $\left[Ag^{+}_{(aq)}\right]_t = 0{,}2 - \dfrac{0{,}15}{9{,}65.10^4 \times 0{,}1}.t$ ou bien $\underbrace{\left[Ag^{+}_{(aq)}\right]_t}_{mo\ell.L^{-1}} = 0{,}2 - 1{,}55.10^{-5}.\underbrace{t}_{(s)}$

3- * Détermination de la durée t_d de fonctionnement de la pile :

A la fin de la réaction, les ions argent seront considérés comme réactif limitant :

Alors $\left[Ag^{+}_{(aq)}\right]_f = 0{,}2 - 1{,}55.10^{-5}.t_d = 0 \Rightarrow t_d = \dfrac{0{,}2}{1{,}55.10^{-5}} = 1{,}29.10^4\,s \approx 3h35\min 3s$

*** La concentration des ions fer II à la fin de la réaction :**

$$\left[Fe^{2+}_{(aq)}\right]_f = \frac{n_f(Fe^{2+})}{V_1} = \frac{C_1.V_1 + x_f}{V_1} \Rightarrow \left[Fe^{2+}_{(aq)}\right]_f = C_1 + \frac{1}{V_1}.x_f$$

Finalement : $\left[Fe^{2+}_{(aq)}\right]_f = C_1 + \dfrac{I}{2.F.V_1}.t_d$

- **A.N :** $\left[Fe^{2+}_{(aq)}\right]_f = 0{,}2 + \dfrac{0{,}15}{2 \times 9{,}65.10^4 \times 0{,}1} \times 1{,}29.10^4 \approx 0{,}3\,mo\ell.L^{-1}$

- Physique -

Exercice 1 : LES ONDES ULTRASONORES

1- Détermination de la vitesse d'une onde ultrasonore dans l'air :

1-1- Définition :

La longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde au bout de la période temporelle de cette onde.
C'est aussi la distance séparant deux maxima consécutifs de l'amplitude de l'onde.

1-2- La proposition juste :

est **b)** : Les ondes ultrasonores sont des ondes mécaniques qui nécessitent un milieu matériel pour s'y propager.

1-3- Détermination de la vitesse :

On sait que $V = \lambda.N$ et $\lambda = \dfrac{d}{n}$ $(d'apr\grave{e}s\ les\ donn\acute{e}es)$

Donc : $V = \dfrac{d}{n}.N$

- **A.N :** $V = \dfrac{10{,}2.10^{-2}}{12}.40.10^3 = 340\,m.s^{-1}$

2- Application à la consultation par échographie :

Recherche de l'épaisseur ℓ_2 du fœtus dans le ventre maternel :

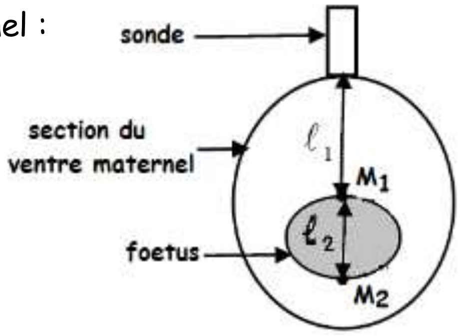
On a : $2.\ell_1 = V.t_1$ (1) et $2.(\ell_1+\ell_2) = V.t_2$ (2)

Faisons la différence (2) - (1) ; on aura :

$2.(\ell_1+\ell_1) - 2.\ell_1 = V.t_2 - V.t_1$

Ou bien : $2.\ell_2 = V.(t_2 - t_1)$

Finalement : $\underline{\ell_2 = \dfrac{V.(t_2-t_1)}{2}}$



- A.N : $\ell_2 = \dfrac{1540 \times .(130-80).10^{-6}}{2} = \underline{3{,}85.10^{-2} m = 3{,}85 cm}$

3- Diffraction d'une onde ultrasonore dans l'air :

3-1- Comparaison des longueurs d'onde :

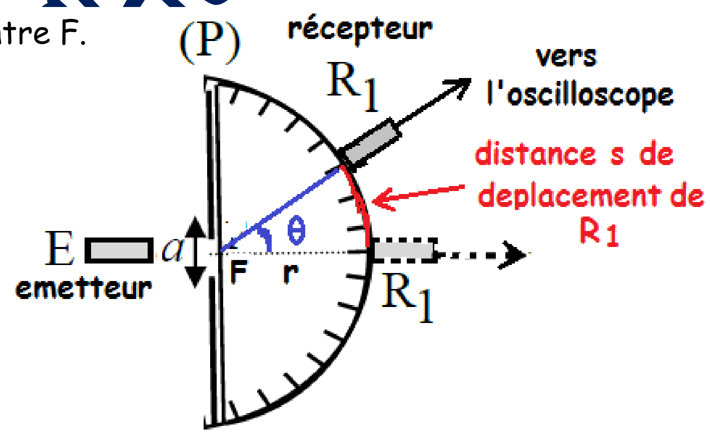
L'onde diffractée et l'onde incidente ont la même longueur d'onde : $(\lambda = \lambda')$

3-2- Recherche de la distance du déplacement du récepteur R_1 :

Soit s le déplacement du récepteur R_1 ; alors s représente la mesure d'un arc de cercle de centre F.

s est lié au rayon r par la relation : $s = r.\theta$

Or la diffraction de l'onde par une fente de largeur a nous permet d'écrire : $\theta = \dfrac{\lambda}{a}$



Alors : $s = r.\dfrac{\lambda}{a}$ mais $\lambda = \dfrac{V}{N}$

Finalement : $\underline{s = r.\dfrac{V}{N.a}}$

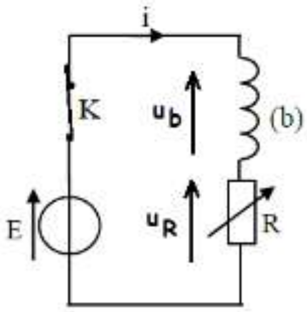
- A.N : $s = 40.10^{-2}.\dfrac{340}{40.10^3 \times 2{,}6.10^{-2}} = \underline{0{,}131 m = 13{,}1 cm}$

Exercice 2 : ELECTRICITE

PartieI : Le dipôle RL et le circuit LC

1- Réponse du dipôle RL à un échelon de tension :

1.1- Equation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$:



D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_b = E$ (1)

En respectant les conventions : $u_R = R.i$ et $u_b = L.\dfrac{di}{dt} + r.i$

La relation (1) devient : $(R+r).i + L.\dfrac{di}{dt} = E$ ou bien $\underline{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R+r}{L} i = \dfrac{E}{L}}$

1.2- Expression de l'intensité i(t) :

- La solution de l'équation est de la forme : $i(t)=A.e^{-\alpha.t}+B$; α, A et B sont des constantes
- La dérivée $\frac{di}{dt}$ est de la forme : $\frac{di}{dt}=-\alpha.A.e^{-\alpha.t}$
- L'équation différentielle peut s'écrire : $-\alpha.A.e^{-\alpha.t}+\frac{R+r}{L}.(A.e^{-\alpha.t}+B)=\frac{E}{L}$

Ou encore : $A.e^{-\alpha.t}(-\alpha+\frac{R+r}{L})+\frac{1}{L}(B.(R+r)-E)=0$

Pour que cette dernière équation admette des solutions en t, il faut :

$A.e^{-\alpha.t}\underbrace{(-\alpha+\frac{R+r}{L})}_{=0}+\frac{1}{L}\underbrace{(B.(R+r)-E)}_{=0}=0$ c.à.d $\underline{\alpha=\frac{R+r}{L}}$ et $\underline{B=\frac{E}{R+r}}$

- A l'instant t = 0 : $i(t=0)=0$ et $i(t=0)=A.\underbrace{e^{-\alpha\times 0}}_{=1}+B=A+B$ alors $A=-B$ ou $\underline{A=-\frac{E}{R}}$

Finalement : $\underline{i(t)=\frac{E}{R+r}.\left(1-e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right)}$

1.3.1- Recherche de R_1 et r :

- Pour la courbe (C1) : $i(t)$ *est majorée par* $i_1=5\times 25=125mA$

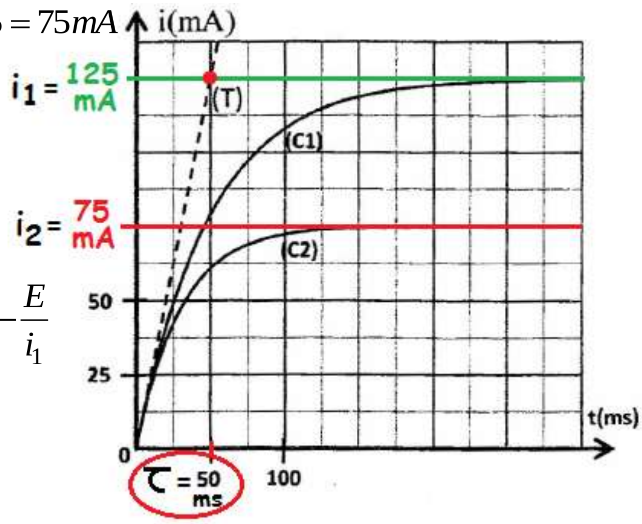
et $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{E}{R_1+r}.\left(1-e^{-\frac{R_1+r}{L}.t}\right)\right]=\frac{E}{R_1+r}$

donc $\frac{E}{R_1+r}=i_1$ *ou bien* $R_1+r=\frac{E}{i_1}$ (1)

- Pour la courbe (C2) : $i(t)$ *est majorée par* $i_2=3\times 25=75mA$

et $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{E}{2R_1+r}.\left(1-e^{-\frac{2R_1+r}{L}.t}\right)\right]=\frac{E}{2R_1+r}$

donc $\frac{E}{2R_1+r}=i_2$ *ou bien* $2R_1+r=\frac{E}{i_2}$ (2)



En faisant (2) – (1) on écrit : $(2R_1+r)-(R_1+r)=\frac{E}{i_2}-\frac{E}{i_1}$

On obtient : $\underline{R_1=E(\frac{1}{i_2}-\frac{1}{i_1})}$

Et : $R_1+r=\frac{E}{i_1} \Rightarrow r=\frac{E}{i_1}-R_1=\frac{E}{i_1}-\left(\frac{E}{i_2}-\frac{E}{i_1}\right)$

On obtient : $\underline{r=E(\frac{2}{i_1}-\frac{1}{i_2})}$

- A.N : $R_1 = 1{,}5 \times (\frac{1}{75.10^{-3}} - \frac{1}{125.10^{-3}}) = \underline{8\Omega}$ et $r = 1{,}5 \times (\frac{2}{125.10^{-3}} - \frac{1}{75.10^{-3}}) = \underline{4\Omega}$

1.3.2- Montrons que L = 0,6H :

- La constante du temps du dipôle RL étudié a pour valeur (graphiquement) : $\tau = 50ms$
- La constante du temps d'un dipôle RL a pour expression : $\tau = \frac{L}{R+r}$ alors $\underline{L = \tau.(R+r)}$

- A.N : $L = 50.10^{-3}.(8+4) = \underline{0{,}6H}$

2- Etude d'un circuit LC :

2.1- Montrons que l'énergie électrique totale du circuit est constante :

La tension aux bornes du condensateur est : $u_c = U_0 \cos(2\pi.f_0.t + \varphi)$

On sait que : $E_{tot} = E_{éle} + E_{mag}$

Or $E_{élc} = \frac{1}{2}C.u_c^{\,2} = \frac{1}{2}CU_0^{\,2}\cos^2(2\pi.f_0.t+\varphi)$ et

$$E_{mag} = \frac{1}{2}L.i^2 = \frac{L}{2}.(\frac{Cdu_c}{dt})^2 = \frac{1}{2}.(4\pi^2 f_0^{\,2}LC^2).U_0^{\,2}\sin^2(2\pi.f_0.t+\varphi)$$

Donc $E_{tot} = \frac{1}{2}CU_0^{\,2}\cos^2(2\pi.f_0.t+\varphi) + \frac{1}{2}C.(\underbrace{4\pi^2 f_0^{\,2}LC}_{=1}).U_0^{\,2}\sin^2(2.\pi.f_0.t+\varphi)$

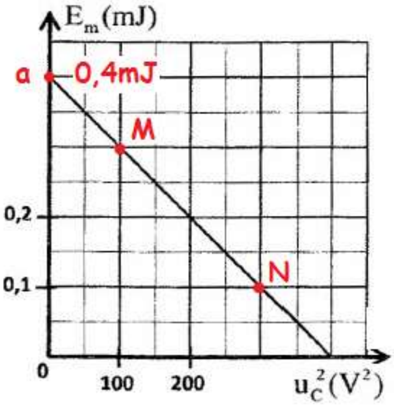
On sait que ; $T_0 = 2.\pi\sqrt{LC} = \frac{1}{f_0} \Leftrightarrow 4.\pi^2 f_0^{\,2}LC = 1$

Alors : $E_{tot} = \frac{1}{2}CU_0^{\,2}\left[\underbrace{\cos^2(2\pi.f_0.t+\varphi)+\sin^2(2.\pi.f_0.t+\varphi)}_{=1}\right]$ Finalement : $\underline{E_{tot} = \frac{1}{2}CU_0^{\,2} = Cte}$

2.2- Détermination de la capacité C :

L'expression de l'énergie magnétique est : $E_{mag} = E_{tot} - E_{éle} \Rightarrow E_{mag} = \underbrace{E_{tot}}_{a} - \underbrace{\frac{1}{2}C}_{b}.u_c^2$

On voit bien que la fonction $E_{mag} = f(u_c^2)$ est une fonction affine de la forme : $E_{mag} = a + b.u_c^2$



* b représente le coefficient directeur de la droite :

$$b = -\frac{1}{2}.C \Rightarrow C = -2.b \Rightarrow C = -2.\frac{E_m(M)-E_m(N)}{u_c^2(M)-u_c^2(N)}$$

- A.N : $C = -2 \times \frac{0{,}3.10^{-3} - 0{,}1.10^{-3}}{100-300} = \underline{2.10^{-6}F}$

* a représente l'ordonnée à l'origine :

$$a = E_{tot} = \frac{1}{2} C U_0^2 \Rightarrow \underline{U_0 = \sqrt{\frac{2.a}{C}}}$$

- A.N : $U_0 = \sqrt{\frac{2 \times 0,4.10^{-3}}{2.10^{-6}}} = \underline{20V}$

PartieII : La Modulation d'amplitude

1- La fréquence de l'onde porteuse :

A l'entrée E₁ est appliqué le signal de l'onde porteuse : $u_1(t) = P_m \cos(2\pi.f.t) = 6.\cos(4.10^5 \pi.t)$

Par identification on trouve : $\underline{f = 2.10^5 Hz = 200\,KHz}$

2- La bonne réponce est : b) en effet :

L'amplitude de l'onde modulée est : $A(t) = 3.\left[1 + 0,4.\cos(8\pi.10^3.t)\right]$

Pour $\cos(8\pi.10^3.t) = 1$ alors $A = A_{max} = 3.[1 + 0,4 \times 1] \underline{= 4,2V}$

3- Les 2 conditions sont verifiées :

A l'entrée E₂ est appliqué le signal de l'onde à moduler avec la composante continue :

$$u_2(t) = S_m \cos(2\pi.f_s.t) + U_0 = \underbrace{2}_{S_m}.\cos(2\pi \times \underbrace{4.10^3}_{f_s} \times t) + \underbrace{5}_{U_0}$$

* La fréquence $f = 2.10^5 Hz = 200\,KHz$ de l'onde porteuse est très supérieure à la fréquence $f_s = 4.10^3 Hz = 4KHz$ de l'onde à moduler. ($f = 50.f_s >> f_s$)

* Le taux de modulation $m = \frac{S_m}{U_0} = \frac{2}{5} = 0,4 < 1$

4- Expression de $u_s(t)$:

$$u_s(t) = k.u_2(t).u_1(t)$$

$$\Rightarrow u_s(t) = k.\left[2.\cos(8\pi.10^3.t) + 5\right] \times 6.\cos(4\pi.10^5.t)$$

$$\Rightarrow u_s(t) = 12k.\cos(4\pi.10^5.t)\cos(8\pi.10^3.t) + 30.k\cos(4\pi.10^5.t)$$

$$\Rightarrow u_s(t) = \frac{12.k}{2}\left[\cos\left(2\pi.(2.10^5 + 4.10^3).t\right) + \cos\left(2\pi.(2.10^5 - 4.10^3).t\right)\right] + 30.k\cos(4\pi.10^5.t)$$

$$\Rightarrow u_s(t) = \underbrace{6k.\cos\left(2\pi.(\underbrace{2.10^5 + 4.10^3}_{f+f_s}).t\right)}_{f_3(t)} + \underbrace{6.k.\cos\left(2\pi.(\underbrace{2.10^5 - 4.10^3}_{f-f_s}).t\right)}_{f_2(t)} + \underbrace{30k.\cos(2\pi.\underbrace{2.10^5}_{f}.t)}_{f_1(t)}$$

Déterminons la valeur de K :

$$u_s(t) = k.u_2(t).u_1(t)$$

$$\Rightarrow u_s(t) = k.\left[5 + 2.\cos(8\pi.10^3.t)\right] \times 6.\cos(4\pi.10^5.t)$$

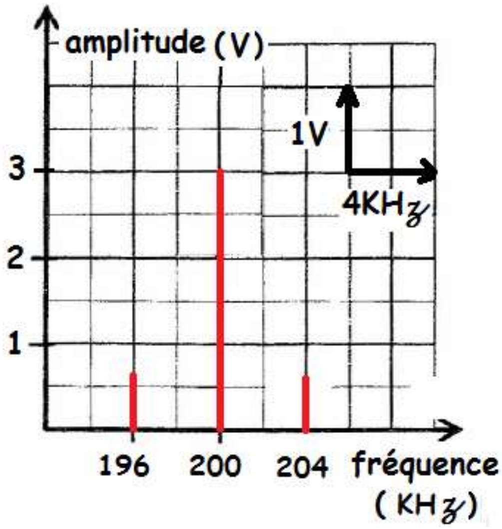
$$\Rightarrow u_s(t) = \underbrace{30.k}_{=3}.\left[1 + 0,4.\cos(8\pi.10^3.t)\right].\cos(4\pi.10^5.t) \quad avec\; u_s(t) = 3.\left[1 + 0,4.\cos(8\pi.10^3.t)\right].\cos(4\pi.10^5.t)$$

Alors on trouve : $30.k = 3 \Rightarrow k = \underline{0,1V^{-1}}$

Finalement :

$$\Rightarrow u_s(t)=\underbrace{0,6.\cos\left(2\pi.(\underbrace{2.10^5+4.10^3}_{f+f_s}).t\right)}_{f_3(t)}+\underbrace{0,6.\cos\left(2\pi.(\underbrace{2.10^5-4.10^3}_{f-f_s}).t\right)}_{f_2(t)}+\underbrace{3.\cos(2\pi.\underbrace{2.10^5}_{f}.t)}_{f_1(t)}$$

*** Représentation du spectre de fréquences :** (avec l'échelle : $1cm.V^{-1}$)



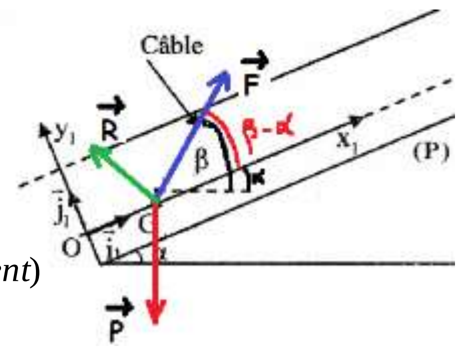
Exercice 3 : MECANIQUE

Partie I : Mouvement d'un skieur

1- Première phase : mouvement du skieur sur un plan incliné.

1-1- Equation différentielle régissant la vitesse V du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {skieur}
- Repère d'étude (O ; $\vec{i_1}, \vec{j_1}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :



* Poids du skieur $\vec{P}$

* Réaction du plan incliné : $\vec{R}=\vec{R_N}+\vec{f}$ ($\vec{f}$: *force de frottement*)

* Tension du câble $\vec{F}$

- 2ème loi de newton : $\vec{P}+\vec{R_n}+\vec{f}+\vec{F}=m.\vec{a_G}$
- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox₁ : $P_x+R_{N\,x}+f_x+F_x=m.a_x$ (*)
- Expressions : $P_x=-m.g.\sin(\alpha)$, $R_{N\,x}=0$, $f_x=-f$, $F_x=F.\cos(\beta-\alpha)$ et $a_x=\dfrac{dv}{dt}$.
- La relation (*) devient : $-m.g.\sin(\alpha)-f+F.\cos(\beta-\alpha)=m.\dfrac{dv_G}{dt}$

Ou bien : $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{f}{m}+g.\sin(\alpha)-\dfrac{F}{m}.\cos(\beta-\alpha)=0$

1-2-1- Détermination graphique de la valeur de l'accélération du mouvement de G :

- L'accélération de G est **constante** d'après : $\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{f}{m}-g.\sin(\alpha)+\dfrac{F}{m}.\cos(\beta-\alpha)=Cte$

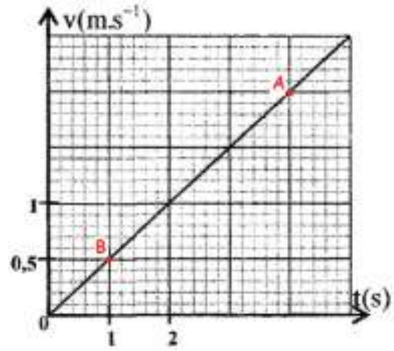
Alors la mouvement de G est rectiligne uniformément varié :

- L'expression de la vitesse est de la forme : $v(t)=a.t+v_0 \;\; avec\, v_0=v(t=0)=0$

Donc on aura : $v(t)=a.t$

- Graphiquement a représente le coefficient directeur de la droite : $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v_A-v_B}{t_A-t_B}$

- **A.N :** $a=\dfrac{2-0{,}5}{4-1}=\underline{0{,}5 m.s^{-2}}$



1-2-2- Déduction de l'intensité de la force de traction F :

On a établit que : $a=\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{f}{m}-g.\sin(\alpha)+\dfrac{F}{m}.\cos(\beta-\alpha)=Cte$

$\Rightarrow m.a+f+mg.\sin(\alpha)=F.\cos(\beta-\alpha)$

Ou bien : $\underline{F=\dfrac{m.a+f+m.g.\sin(\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}}$

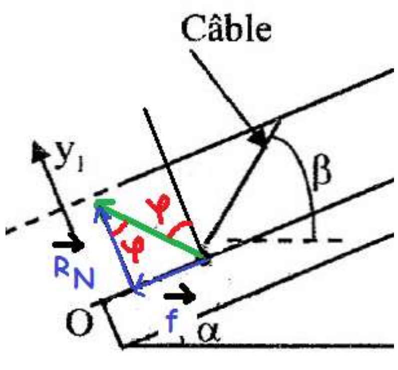
- **A.N :** $F=\dfrac{60\times 0{,}5+80+60\times 9{,}8\times \sin(23)}{\cos(60-23)}\approx \underline{425{,}4N}$

1-3- Détermination de la valeur de k :

- Le coefficient de frottement K est défini par :

$K=\tan(\varphi) \;\; avec\, \varphi \; est\; l'angle\, de\; frottement$

D'après la figure ci-contre : $K=\tan(\varphi)=\dfrac{f}{R_N}$



- Cherchons l'expression de l'intensité R_N de la composante de la réaction $\vec{R}$ du plan sur le skieur :

* $2^{ème}$ loi de newton : $\vec{P}+\underbrace{\vec{R}_N+\vec{f}}_{\vec{R}}+\vec{F}=m.\vec{a}_G$

* Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oy_1 : $P_y+R_{N_y}+f_y+F_y=m.a_y \quad (*)$

* Expressions :

$P_y=-m.g.\cos(\alpha)$, $R_{N_y}=R_N$, $f_y=0$, $F_y=F.\sin(\beta-\alpha)$

et $a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=0$ $(Pas\, de\, mouvement\, de\, G\, sur\, Oy_1)$.

* La relation (*) devient : $-m.g.\cos(\alpha)+R_N+0+F.\sin(\beta-\alpha)=0$

On obtient : $R_N=m.g.\cos(\alpha)-F.\sin(\beta-\alpha)$

Finalement : $\underline{K=\dfrac{f}{m.g.\cos(\alpha)-F.\sin(\beta-\alpha)}}$

- A.N : $K=\dfrac{80}{60\times 9{,}8\times\cos(23)-425{,}5\times\sin(60-23)}=\underline{0{,}28}$

2- Deuxième phase : Phase du saut.

2-1- Etablissement des expressions numériques des équations horaires x(t) et y(t) :

- Système à étudier : {skieur}
- Repère d'étude (S ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :

  Poids du corps : $\vec{P}$
- 2ème loi de newton : $\vec{P}=m.\vec{a}_G$
- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox et sur Oy :

$$\begin{cases} m.a_x=P_x=0 \\ m.a_y=P_y=-P=-mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt}=a_x=0 \\ \dfrac{dv_y}{dt}=a_y=-g \end{cases} \overset{Par\,intégration}{\Rightarrow} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=v_x=v_S.\cos(\alpha) & (v_{0x}=v_S.\cos(\alpha)) \\ \dfrac{dy}{dt}=v_y=-g.t+v_S.\sin(\alpha) & (v_{0y}=v_S.\sin(\alpha)) \end{cases}$$

$$\overset{Par\,intégration}{\Rightarrow} \begin{cases} \underline{x(t)=v_s\cos(\alpha).t} & (x_0=0) \\ \underline{y(t)=-\dfrac{1}{2}g.t^2+v_s\sin(\alpha).t} & (y_0=0) \end{cases}$$

- A.N : $\begin{cases} x(t)=10\times\cos(23).t \\ y(t)=-\dfrac{1}{2}\times 9{,}8.t^2+10\times\sin(23).t \end{cases}$ c.à.d $\begin{cases} \underline{x(t)=9{,}21.t} \\ \underline{y(t)=-4{,}9.t^2+3{,}91.t} \end{cases}$

2-2- Déduction de l'équation de la trajectoire de G : y = -5,8.10^-2 x^2 + 0,42.x

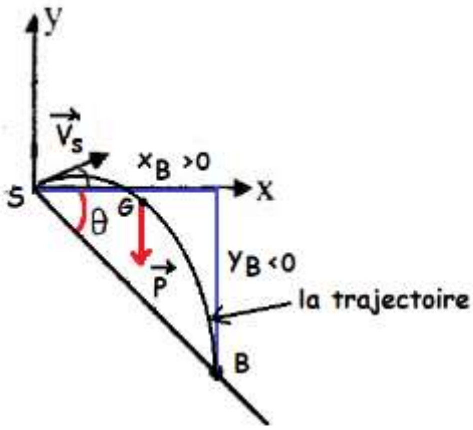
$$\begin{cases} t=\dfrac{x}{9{,}21} \\ y(x)=-4{,}9\times\left(\dfrac{x}{9{,}21}\right)^2+3{,}91\times\dfrac{x}{9{,}21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{9{,}21} \\ \underline{y(x)=-5{,}8.10^{-2}.x^2+0{,}42.x} \leftarrow équation\,de\,la\,trajectoire \end{cases}$$

2-3- Recherche de la longueur SB du saut :

- D'après le théorème de Pythagore : $SB=\sqrt{x_B{}^2+y_B{}^2}$
- Le point B appartient à la trajectoire de G : $y_B=y(x_B)=-5{,}8.10^{-2}.x_B{}^2+0{,}42.x_B$ (*)

- La relation liant les coordonnées de la position B est :

$\tan(\theta)=\frac{-y_B}{x_B}$ *ou bien* $y_B=-x_B.\tan(\theta)$



avec $\tan(45°)=1$ *on aura* $x_B=-y_B$

- La distance SB s'écrira : $SB=\sqrt{x_B{}^2+(-x_B)^2}=x_B\sqrt{2}$

- Cherchons alors la valeur de x_B :

La relation (*) devient : $-x_B=-5{,}8.10^{-2}.x_B{}^2+0{,}42.x_B$

qui peut s'écrire de la façon : $\left(-5{,}8.10^{-2}.x_B+1{,}42\right).x_B=0$

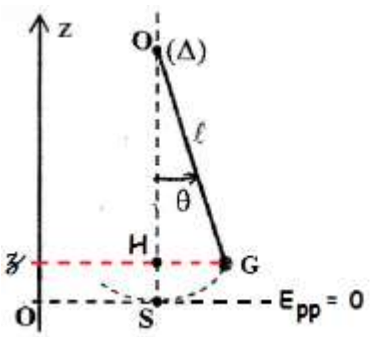
avec $x_B\neq 0$, on trouve : $x_B=\frac{1{,}42}{5{,}8.10^{-2}}=24{,}5m$

- A.N : $SB=24{,}5\times\sqrt{2}\approx\underline{34{,}65m}$

Partie II : Mouvement d'un pendule simple

1-1- Recherche de l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule :

On sait que : $E_{pp}=mg.(z-z_0)$



avec $z_0=0$ *et* $z=z_H=OS-OH=\ell-\ell\cos(\theta)$

alors $E_{pp}=mg\ell.(1-\cos(\theta))$ *mais* $\cos(\theta)\approx 1-\frac{\theta^2}{2}$

Finalement : $\underline{E_{pp}=\frac{1}{2}mg\ell.\theta^2}$

1-2- Détermination de la valeur de l'énergie mécanique du pendule :

- L'énergie mécanique du pendule se conserve : $E_m=E_c(\theta=\theta_m)+E_{pp}(\theta=\theta_m)$

- Or lorsque l'abscisse angulaire $\theta=\theta_m$: $E_c(\theta_m)=0$ $(vitesse\ nulle\ en\ cette\ position)$

- On écrit : $E_m=E_{pp}(\theta_m)$

Finalement : $\underline{E_m=\frac{1}{2}mg\ell.\theta_m{}^2}$

- A.N : $E_m=\frac{1}{2}\times 20.10^{-3}\times 9{,}81\times 24{,}8.10^{-2}\times\left(8\times\frac{\pi}{180}\right)^2=\underline{4{,}74.10^{-4}J}$

1-3- Etablissement de l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ(t) :

- Energie mécanique : à tout instant on a : Em = Ec(t) + Epp(t)

$-Energie\ cinétique\ E_c=\frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$ *avec* $J_\Delta=m.\ell^2$ alors $E_c=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

Donc : $E_m=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mg\ell.\theta^2=Cte$

- Dérivons l'énergie mécanique par rapport au temps ; avec $\frac{dE_m}{dt}=0$:

On a alors : $\frac{1}{2}m\ell^2\frac{d(\dot{\theta})^2}{dt}+\frac{1}{2}mg\ell.\frac{d(\theta)^2}{dt}=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\ell^2\left(2.\dot{\theta}.\frac{d(\dot{\theta})}{dt}\right)+\frac{1}{2}mg\ell.\left(2.\theta.\frac{d(\theta)}{dt}\right)=0 \quad \Rightarrow \ell\left(\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right)+g.\left(\theta.\dot{\theta}\right)=0 \quad avec\ \dot{\theta}\neq 0$$

Finalement : $\underline{\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}.\theta=0}$

2-1- * Expression de T_0 :

On sait que cette période a pour expression : $\underline{T_0=2.\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$

*** Vérification que T_0 est homogène à un temps :**

On utilise l'équation aux dimensions :
- On a $[T_0]=T \quad (1)$
- On a également $[L]=L \quad et \quad [g]=L.T^{-2}$

Alors $\left[2.\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right]=\underbrace{[2.\pi]}_{=1}\times\left[\sqrt{\frac{L}{g}}\right]=\frac{[L]^{1/2}}{[g]^{1/2}}=\frac{L^{1/2}}{L^{1/2}\times T^{-1}}=T \quad (2)$

Donc (1) et (2) affirment que T_0 et $2.\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ont la même dimension :

la relation $T_0=2.\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ est homogène.

2-2- * Calcul de la valeur de T_0 :

- A.N : $T_0=2.\pi\sqrt{\frac{24,8.10^{-2}}{9,81}}\approx\underline{1s}$

*** Déduction du nombre de signaux sonores émis durant la durée Δt=10,25s :**

- Quand la bille passe de A et arrive en B, on entend **2** signaux sonores et la durée écoulée est $\frac{T_0}{2}=0,5s$
- Durant la durée $\Delta t=10,25s=10+0,25=20.\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{4}$

le nombre de signaux sonores émis est alors $\underline{20}$.

3- Montrons que la vitesse angulaire a pour expression : $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_S.\sqrt{1-\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right)^2}$

On a établit : $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\ell.\theta^2 = Cte$

A la position **A** : $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = \theta_m$ alors $E_m = \frac{1}{2}mg\ell.\theta_m{}^2$

On peut écrire : $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\ell.\theta^2 = \frac{1}{2}mg\ell.\theta_m{}^2$

Après simplification on aura : $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{\ell}.\left(\theta_m{}^2 - \theta^2\right) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{\ell}.\theta_m{}^2\left(1-\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right)^2\right)$

Ou bien : $\dot{\theta}(t) = \pm\theta_m.\sqrt{\frac{g}{\ell}}.\sqrt{\left(1-\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right)^2\right)}$

Lorsque la bille passe par S, l'abscisse angulaire est nulle $(\theta = 0)$, et la vitesse angulaire est

$$\dot{\theta}_S(\theta = 0) = \pm\theta_m.\sqrt{\frac{g}{\ell}}.\sqrt{\left(1-\left(\frac{0}{\theta_m}\right)^2\right)} = \pm\theta_m.\sqrt{\frac{g}{\ell}};$$

Finalement on aboutit à la relation demandée :

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_S.\sqrt{\left(1-\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right)^2\right)} \quad avec\ \dot{\theta}_S = \pm\theta_m.\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$