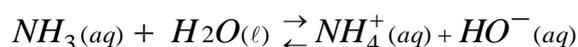


- Chimie -Partie I : *Etude d'une solution aqueuse d'ammoniac et de sa réaction avec un acide.*

## 1- Etude d'une solution aqueuse d'ammoniac :

1-1- On prépare une solution aqueuse S<sub>1</sub> d'ammoniac :1-1-1- Equation chimique modélisant la réaction de l'ammoniac avec l'eau :1-1-2- \* Expression du taux d'avancement final  $\tau_1$  de la réaction :

Equation de la réaction		$NH_3(aq) + H_2O(\ell) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + HO^-(aq)$			
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C_1 \cdot V$	<i>en excès</i>	0	0
Etat intermédiaire	x	$C_1 \cdot V - x$	<i>en excès</i>	x	x
Etat final	$x_f$	$C_1 \cdot V - x_f$	<i>en excès</i>	$x_f$	$x_f$

- Par définition :  $\tau_1 = \frac{x_f}{x_m}$ 

- D'après le tableau d'avancement de la réaction :

$$x_f = [HO^-]V \quad \text{et} \quad x_m = C_1 \cdot V \Rightarrow \tau_1 = \frac{[HO^-]}{C_1}$$

- Le produit ionique de l'eau, et la définition du pH donnent :

$$[H_3O^+] \cdot [HO^-] = K_e \quad \text{et} \quad [H_3O^+] = 10^{-pH_1} \Rightarrow [HO^-] = K_e \cdot 10^{pH_1}$$

- En combinant toutes ces relations, on aura :

$$\tau_1 = \frac{K_e \cdot 10^{pH_1}}{C_1}$$

\* Vérification de  $\tau_1 \approx 4\%$  :

$$A.N : \tau_1 = \frac{10^{-14} \times 10^{10,6}}{10^{-2}} \approx 0,04 = 4\%$$

1-1-3- \* Expression de la constante d'équilibre K associée à l'équation de la réaction :- Par définition :  $K = \frac{[NH_4^+] \times [HO^-]}{[NH_3]}$ 

- D'après le tableau d'avancement de la réaction :

$$[HO^-] = [NH_4^+] = \tau_1 \cdot C_1 \quad \text{et} \quad [NH_3] = C_1 - [NH_4^+] = C_1 \cdot (1 - \tau_1)$$

- La constante K peut s'écrire :  $K = \frac{(\tau_1 \cdot C_1)^2}{C_1 \cdot (1 - \tau_1)}$  ou bien  $K = \frac{\tau_1^2 \cdot C_1}{1 - \tau_1}$

\* Calcul de sa valeur :  $K = \frac{0,04^2 \times 10^{-2}}{1 - 0,04} \approx 1,67 \cdot 10^{-5}$

1-2- On dilue la solution S<sub>1</sub>, on obtient alors une solution S<sub>2</sub> :

**1-2-1- Association de la forme basique du couple NH<sub>4</sub><sup>+</sup> / NH<sub>3</sub> à la courbe qui lui correspond :**

- Le pourcentage de la forme basique est :  $\frac{[NH_3]}{[NH_3] + [NH_4^+]} \times 100$

- Pour une solution basique ce pourcentage est grand et est supérieur à 50% ; donc la courbe (2) correspond à la forme basique du couple NH<sub>4</sub><sup>+</sup>/NH<sub>3</sub>.

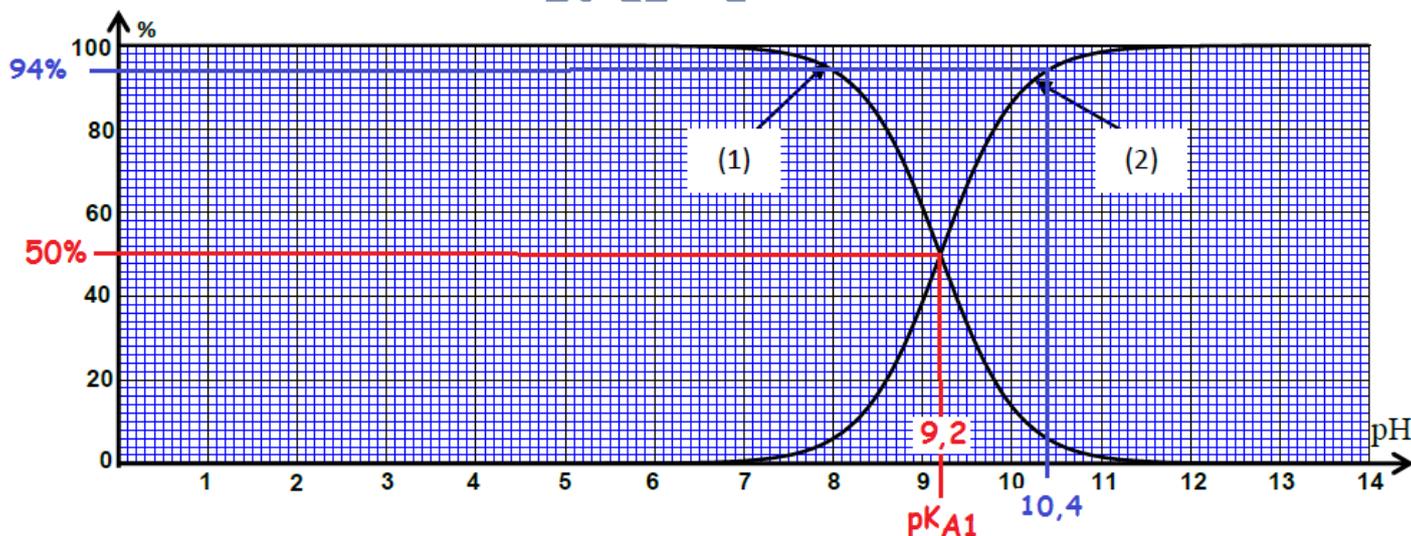
**1-2-2- A l'aide des courbes représentées sur la figure :**

**a- Détermination de pK<sub>A1</sub> :**

- Pour le couple :  $pH = pK_{A1} + \text{Log} \frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$

- Lorsque  $\frac{[NH_3]}{[NH_3] + [NH_4^+]} \times 100 = \frac{[NH_4^+]}{[NH_3] + [NH_4^+]} \times 100$  alors  $[NH_3] = [NH_4^+]$

- On en déduit :  $pK_{A1} = pH$



- Graphiquement on trouve :  $pK_{A1} \approx 9,2$

**b- Détermination du taux d'avancement  $\tau_2$  de la réaction dans la solution S<sub>2</sub> :**

- Pour la réaction :  $K = \frac{\tau_2^2 \cdot C_2}{1 - \tau_2}$  *K ne dépend que de la température*

- On a aussi :  $\tau_2 = \frac{K_e \cdot 10^{pH_2}}{C_2}$

- En éliminant  $C_2$  des 2 relations précédentes, on trouve :  $\tau_2 = \frac{K}{K + K_e \cdot 10^{pH_2}}$

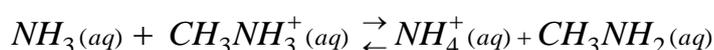
$$\text{A.N : } \tau_2 = \frac{1,67 \cdot 10^{-5}}{1,67 \cdot 10^{-5} + 10^{-14} \times 10^{10,4}} \approx \underline{0,062 = 6,2\%}$$

**1-2-2- Que peut-on déduire en comparant  $\tau_1$  et  $\tau_2$  ?**

$\tau_2 = 6,2\% > \tau_1 = 4\%$  : On déduit que la dilution augmente la dissociation de l'espèce  $\text{NH}_3$ .

**2- Etude de la réaction de l'ammoniac avec l'ion méthylammonium :**

**2-1- Equation chimique entre ammoniac et l'ion méthylammonium :**



**2-2- La constante d'équilibre  $K'$  associée à l'équation de cette réaction :**

$$\text{On a } K' = \frac{K_{A2}}{K_{A1}} = \frac{10^{-pK_{A2}}}{10^{-pK_{A1}}} \Rightarrow K' = 10^{(pK_{A1} - pK_{A2})}$$

$$\text{A.N : } K' = 10^{9,2-10,7} \approx \underline{3,2 \cdot 10^{-2}}$$

**2-3- Montrons que :**  $[\text{CH}_3\text{NH}_2] = [\text{NH}_4^+] = \frac{C \cdot \sqrt{K'}}{2 \cdot (1 + \sqrt{K'})}$

- D'après le tableau d'avancement de la réaction et à l'équilibre :

$$[\text{CH}_3\text{NH}_2] = [\text{NH}_4^+] = \frac{x_f}{2V} \quad \text{et} \quad [\text{CH}_3\text{NH}_3^+] = [\text{NH}_3] = \frac{C \cdot V - x_f}{2V} = \frac{C}{2} - [\text{NH}_4^+] \quad (V_{\text{sol}} = V + V = 2V)$$

$$\text{- Par définition : } K' = \frac{[\text{CH}_3\text{NH}_2] \times [\text{NH}_4^+]}{[\text{CH}_3\text{NH}_3^+] \times [\text{NH}_3]}$$

$$\text{- En combinant toutes ces relations, on aura : } K' = \frac{[\text{NH}_4^+]^2}{[\text{NH}_3]^2} = \frac{[\text{NH}_4^+]^2}{\left(\frac{C}{2} - [\text{NH}_4^+]\right)^2}$$

$$\text{Alors } \frac{[\text{NH}_4^+]}{\frac{C}{2} - [\text{NH}_4^+]} = +\sqrt{K'} \Rightarrow [\text{NH}_4^+] = \frac{C}{2} \cdot \sqrt{K'} - [\text{NH}_4^+] \sqrt{K'} \Rightarrow [\text{NH}_4^+] (1 + \sqrt{K'}) = \frac{C}{2} \cdot \sqrt{K'}$$

$$\text{Finalement : } [\text{CH}_3\text{NH}_2(aq)] = [\text{NH}_4^+(aq)] = \frac{C}{2} \cdot \frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}$$

**2-4- Le pH du mélange réactionnel à l'équilibre :**

- Pour le mélange réactionnel ; la relation suivante est vérifiée :  $pH = pK_{A1} + \text{Log} \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$

- On a les résultats déjà établis :

$$[NH_4^+] = \frac{C}{2} \cdot \frac{\sqrt{K'}}{1+\sqrt{K'}} \quad \text{et} \quad [NH_3] = \frac{C}{2} - [NH_4^+] = \frac{C}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{K'}}{1+\sqrt{K'}} \right) = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{K'}}$$

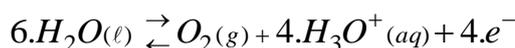
- En remplaçant les 2 expressions ; on trouve :

$$pH = pK_{Al} + \text{Log} \left( \frac{\frac{C}{2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{K'}}}{\frac{C}{2} \cdot \frac{\sqrt{K'}}{1+\sqrt{K'}}} \right) \quad \text{ou bien} \quad pH = pK_{Al} - \text{Log}(\sqrt{K'})$$

**A.N :**  $pH = 9,2 - \text{Log}(\sqrt{3,2 \cdot 10^{-2}}) \approx \underline{9,95}$

**Partie II :** *Electrolyse d'une solution aqueuse de nitrate d'argent.*

**1- Equation de la réaction qui se produit à l'anode :**



**2- Expression de l'avancement x de la réaction à un instant t :**

- Dressons le tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$6.H_2O(\ell) + 4.Ag^+(aq) \rightarrow O_2(g) + 4.H_3O^+(aq) + 4.Ag(s)$					Quantité des $e^-$ échangés :
E.S	Avancement x (mol)	Quantités de matière (mol)					
E. I	0	$n_0(H_2O)$	$n_0(Ag^+)$	0	$n_0(H_3O^+)$	0	0
E. Inter	x	$n_0(H_2O) - 6.x$	$n_0(Ag^+) - 4.x$	x	$n_0(H_3O^+) + 4.x$	4.x	$n(e^-) = 4.x$
E. F	$x_{max}$	$n_0(H_2O) - 6.x_m$	$n_0(Ag^+) - 4.x_m$	$x_m$	$n_0(H_3O^+) + 4.x_m$	4.x_m	$n(e^-) = 4.x_m$

- A l'instant t, on peut écrire :  $n_t(H_3O^+) = n_0(H_3O^+) + 4.x$  alors  $[H_3O^+] = [H_3O^+]_0 + 4 \cdot \frac{x}{V}$

- On en déduit ; avec  $[H_3O^+] = 10^{-pH_t}$  et  $[H_3O^+]_0 = 10^{-pH_0}$  ; que :

$$x = \frac{V}{4} \cdot (10^{-pH_t} - 10^{-pH_0})$$

**3- L'instant  $t_1$  où le pH du mélange prend la valeur  $pH_1 = 1,5$ .**

- La quantité d'électricité échangée entre  $H_2O$  et  $Ag^+$  pendant  $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$

$$Q = I \times \Delta t = n(e^-) \times F \quad \text{ou bien} \quad I \times t_1 = 4.x \times F \quad \text{alors} \quad t_1 = \frac{4.F}{I} \cdot x$$

- Finalement on obtient :  $t_1 = \frac{F.V}{I} \cdot (10^{-pH_t} - 10^{-pH_0})$

**A.N :**  $t_1 = \frac{9,65 \cdot 10^4 \times 0,4}{0,266} \cdot (10^{-1,5} - 10^{-3}) \approx \underline{4444 s = 1h 14 min 4s}$

- Physique -Les transformations nucléaires : La radioactivité du polonium**1- Equation de la transformation nucléaire :**

- L'équation de désintégration est :  ${}_{84}^{210}\text{Po} \rightarrow {}_Z^{206}\text{Pb} + {}_2^4\text{He}$
- Conservation de la charge :  $84 = Z + 2$  alors  $Z = 82$
- L'équation devient :  ${}_{84}^{210}\text{Po} \rightarrow {}_{82}^{206}\text{Pb} + {}_2^4\text{He}$

**2- Energie  $\Delta E$  produite lors de la désintégration d'un noyau :**

- L'énergie libérée est :  $E_{lib} = |\Delta E| = \left| E_{\ell}({}_{84}^{210}\text{Po}) - E_{\ell}({}_2^4\text{He}) - E_{\ell}({}_{82}^{206}\text{Pb}) \right|$
- **A.N** :  $E_{lib} = \left| 1,6449 \cdot 10^3 - 28,2989 - 1,6220 \cdot 10^3 \right| \approx 5,4 \text{ MeV}$

**3-1- La proposition juste : est d)**

En effet ; on applique la relation :  $N_D(t = n \times t_{1/2}) = N_0(\text{Po}) \cdot \frac{N_0(\text{Po})}{2^n}$

Ici  $n=4$  :  $N_D(t = 4 \cdot t_{1/2}) = N_0(\text{Po}) \cdot \frac{N_0(\text{Po})}{16} = \frac{15 \cdot N_0(\text{Po})}{16}$

**3-2- Détermination en jour de la demi-vie  $t_{1/2}$  :**

- La loi de désintégration :  $N(\text{Po}) = N_0(\text{Po}) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  avec  $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$

- Cette loi peut s'écrire :  $\ln \left( \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t$  (1)

- La droite représentant la courbe de la fonction  $\ln \left( \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right) = f(t)$  a pour équation :

$$\ln \left( \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right) = K \cdot t \quad (2) :$$

$K$  est le coefficient directeur  $K = \frac{\Delta \ln \left( \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right)}{\Delta t} = \frac{(1/4) \cdot \ln 2}{34,5} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ j}^{-1}$

- Des 2 relations (1) et (2) ; on déduit que :  $K = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$  ou bien  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{K}$

- **A.N** :  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{5 \cdot 10^{-3}} \approx 138,6 \text{ j}$

**3-3- L'instant  $t_1$  pour lequel  $\frac{N(\text{Pb})}{N(\text{Po})} = \frac{2}{5}$  :**

-  $N(\text{Pb})$  est le nombre de noyaux de plomb formés à l'instant  $t_1$  ; c'est aussi le nombre de noyaux du polonium désintégrés :

$$N(\text{Pb}) = N_D(\text{Po}) = N_0(\text{Po}) - N(\text{Po})$$

$$\frac{N_0(\text{Po}) - N(\text{Po})}{N(\text{Po})} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} - 1 = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Alors } \ln\left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})}\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \approx \ln(\sqrt{2}) \approx \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

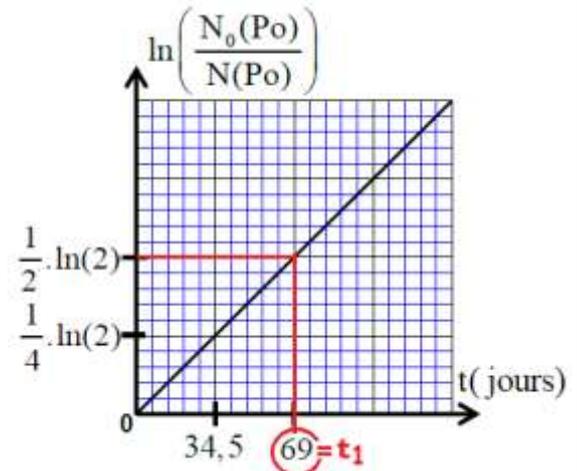
- Par projection ; on trouve  $t_1 \approx 69 \text{ j}$

Remarque :

- Théoriquement on peut écrire :

$$\ln\left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})}\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \cdot t_1 = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \Leftrightarrow t_1 = t_{1/2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{7}{5}\right)}{\ln(2)}$$

$$\text{- A.N : } t_1 = 138,6 \times \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{7}{5}\right) \approx 67,3 \text{ j}$$



## L'ELECTRICITE :

1- Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :

1-1- Equation différentielle vérifiée par l'intensité  $i(t)$  du courant :

- D'après la loi d'additivité des tensions entre A et M :

$$E - u_r = u_{R_0} + u_b$$

- En respectant les conventions :

$$u_{R_0} = R_0 \cdot i ; u_r = r \cdot i \text{ et } u_b = r_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\text{Alors } E - r \cdot i = R_0 \cdot i + r_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow L_0 \cdot \frac{di}{dt} + (r + r_0 + R_0) \cdot i = E$$

$$\text{Finalement : } \frac{di}{dt} + \frac{(r + r_0 + R_0)}{L_0} \cdot i = \frac{E}{L_0}$$

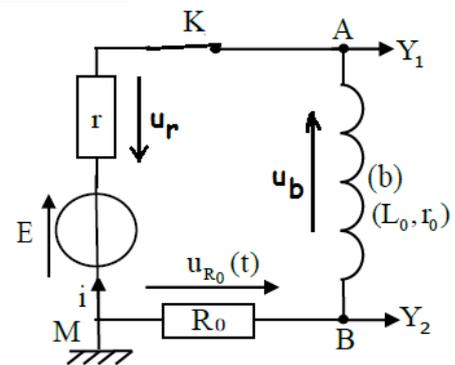


Figure 1

1-2- Valeur de E :

- La courbe ( $C_2$ ) passe par l'origine O : à l'instant  $t = 0$  :  $u_{BM}(0) = 0$

La loi d'ohm permet d'écrire :  $u_{BM}(t) = R_0 \cdot i(t)$  :

On en déduit que :  $i(0) = 0$

- La courbe ( $C_1$ ) représente la tension :  $u_{AM}(t) = E - r \cdot i(t)$  :

et à l'instant  $t = 0$  :  $u_{AM}(0) = E - r \cdot i(0) = E$  , puis graphiquement on trouve :  $u_{AM}(0) = 12 \text{ V}$

On en déduit alors que  $\underline{E = 12 \text{ V}}$

**1-3- \* Valeur de r :**

- Quand le régime permanent sera établi :

\* Graphiquement on relève les tensions :  $u_{AM\infty} = 10V$  et  $u_{BM\infty} = 9V$

\* Ces tensions s'écrivent aussi :  $u_{AM\infty} = E - r \cdot I_{\max}$  et  $u_{BM\infty} = R_0 \cdot I_{\max}$

- Des 2 relations on obtient l'expression :  $r = R_0 \cdot \frac{E - u_{AM\infty}}{u_{BM\infty}}$

- A.N :  $r = 45 \cdot \frac{12 - 10}{9} = 10\Omega$

**\* Montrons que  $r_0 = 5\Omega$  :**

- Au régime permanent l'équation différentielle peut s'écrire :  $\frac{di}{dt} + \frac{(r + r_0 + R_0)}{L_0} \cdot i = \frac{E}{L_0}$

On obtient la relation :  $\frac{di}{dt} + \frac{(r + r_0 + R_0)}{L_0} \cdot i = \frac{E}{L_0}$  ou bien  $(r + r_0 + R_0) \cdot I_{\max} = E$

- Remplaçons  $I_{\max}$  par  $I_{\max} = \frac{u_{BM\infty}}{R_0}$  on aura :  $(r + r_0 + R_0) \cdot \frac{u_{BM\infty}}{R_0} = E$

- Finalement :  $r_0 = R_0 \cdot \frac{E}{u_{BM\infty}} - r - R_0$

- A.N :  $r_0 = 45 \cdot \frac{12}{9} - 10 - 45 = 5\Omega$

**1-4- Vérifions que  $L_0 = 0,18H$  :**

- La constante du temps du circuit étudié a pour expression :  $\tau = \frac{L_0}{r + r_0 + R_0}$

et sa valeur graphiquement est :  $\tau = 3ms = 3 \cdot 10^{-3}s$

- L'expression de l'inductance de la bobine est :  $L_0 = \tau \cdot (r + r_0 + R_0)$

- A.N :  $L_0 = 3 \cdot 10^{-3} \cdot (10 + 5 + 45) = 0,18H$

**2- Décharge d'un condensateur dans le dipôle RL :****2-1- Le régime d'oscillations qui correspond aux courbes de la figure4 :**

C'est le régime pseudo périodique.

**2-2- Equation différentielle vérifiée par la tension  $u_c(t)$  :**

D'après la figure3 :  $u_b + u_R + u_c = 0$

En respectant les conventions :  $u_b = L_0 \cdot \frac{di}{dt} + r_0 \cdot i$  et  $u_R = R \cdot i$

On aussi :  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_c)}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$

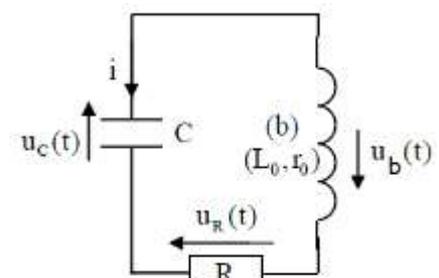


Figure 3

$$\text{Alors : } L_0 C \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (r_0 + R) \cdot C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{(r_0 + R)}{L_0} \cdot \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{L_0 \cdot C} \cdot u_c = 0$$

### 2-3- Energie $|E_j|$ dissipée par effet joule dans le circuit entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 14\text{ms}$ :

- L'expression de l'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à l'instant  $t$  est :

$$E_{Tot}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (u_c(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot L_0 \cdot (i(t))^2 \quad \text{avec } i(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t)$$

$$\Rightarrow E_{Tot}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (u_c(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_0}{R^2} \cdot (u_R(t))^2$$

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à  $t_1 = 0$  est :

$$E_{Tot}(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( \underbrace{u_c(0)}_{=12V} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_0}{R^2} \cdot \left( \underbrace{u_R(0)}_{=0} \right)^2$$

$$\text{A.N : } E_{Tot}(0) = \frac{1}{2} \times 14,1 \cdot 10^{-6} \times 12^2 \approx 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à  $t_2 = 14\text{ms}$  est :

$$E_{Tot}(t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( \underbrace{u_c(t_2)}_{=-3,2V} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_0}{R^2} \cdot \left( \underbrace{u_R(t_2)}_{=-0,5V} \right)^2$$

$$\Rightarrow E_{Tot}(t_2) = \frac{1}{2} \times 14,1 \cdot 10^{-6} \times (-3,2)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{0,18}{20^2} \times (-0,5)^2 \approx 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

- L'énergie dissipée est :

$$|E_j| = E_{Tot}(t_1 = 0) - E_{Tot}(t_2 = 14\text{ms})$$

$$|E_j| = 1,02 \cdot 10^{-3} - 1,28 \cdot 10^{-4} \approx 8,92 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

### 3- Oscillations forcées dans un circuit RLC série :

#### 3-1- La fréquence $f_0$ des oscillations électriques à la résonance :

- Expression du facteur de qualité  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$  où  $\Delta f$  : la largeur de la bande passante à -3dB

$$\text{D'où : } f_0 = Q \cdot \Delta f$$

$$\text{- A.N : } f_0 = 7 \times 14,3 \approx 100 \text{ Hz}$$

#### 3-2- La valeur de $R_1$ et celle de $C_1$ :

- A la résonance on peut écrire :  $U = (R + r_0) \cdot I_0$  alors  $R_1 = \frac{U}{I_0} - r_0$

- A la résonance on peut écrire :  $L_0 \cdot C_1 \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0)^2 = 1$  alors  $C_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 \cdot L_0}$

$$\text{- A.N : } R_1 = \frac{3}{0,185} - 5 = 11,2 \Omega \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{1}{4 \times 10 \times 100^2 \times 0,18} \approx 1,39 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

#### 3-3- La puissance électrique moyenne, consommée par effet joule :

- L'expression de la puissance électrique moyenne, consommée par effet joule :  $P_{moy} = R_{Tot} \cdot I^2$

- Lorsque la fréquence prend l'une des valeurs limitant la bande passante :  $I = I_0 / \sqrt{2}$

- Finalement : 
$$P_{moy} = \frac{(R_1 + r_0) \cdot I_0^2}{2}$$

- A.N : 
$$P_{moy} = \frac{(11,2 + 5) \cdot 0,185^2}{2} \approx \underline{0,28J}$$

## LA MECANIQUE :

### PARTIE I : Etude de la chute de deux boules dans l'air

#### 1- Equation différentielle du mouvement vérifiée par $v_z$ :

- Système à étudier : {La boule}

- Repère d'étude R (O ;  $\vec{k}$ ) supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

\* Poids du corps :  $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = -mg \vec{k}$

\* Force de frottement fluide :  $\vec{f} = 0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v_z^2 \cdot \vec{k}$

- 2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $m \cdot \vec{a}_G = \vec{f} + \vec{P}$

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz :  $m \cdot a_z = f_z + P_z$  (\*)

- Expressions :  $f_z = 0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v_z^2$  ;  $P_z = -P = -m \cdot g$  et  $a_z = \frac{dv_z}{dt}$

- La relation (\*) devient :  $m \cdot \frac{dv_z}{dt} = 0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v_z^2 - m \cdot g$

- ou bien :  $\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2}{m} \cdot v_z^2$  avec  $m = \rho_i \cdot V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho_i$

- L'équation devient :  $\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{0,66 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho_i} \cdot v_z^2$

- Et finalement après simplification :  $\frac{dv_z}{dt} = -g + 0,165 \cdot \frac{\rho_{air}}{R \cdot \rho_i} \cdot v_z^2$

#### 2- Expression de la vitesse limite du mouvement d'une boule :

- Au régime permanent la vitesse reste constante :  $v_z = v_{lim}$  et  $\frac{dv_z}{dt} = 0$

- L'équation différentielle s'écrit :  $0 = -g + 0,165 \cdot \frac{\rho_{air}}{R \cdot \rho_i} \cdot v_{lim}^2$

- On obtient l'expression :  $v_{lim} = -\sqrt{\frac{g \cdot R \cdot \rho_i}{0,165 \cdot \rho_{air}}}$  car  $v_z < 0$

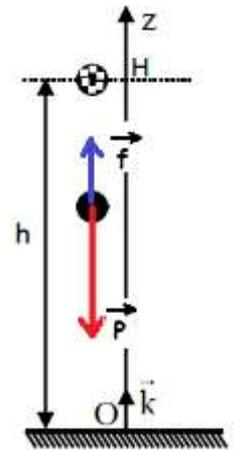


Figure 1

**3-1- La courbe (C<sub>1</sub>) correspond aux variations de la vitesse de la boule (b) :**

- Pour la boule (b) on a :

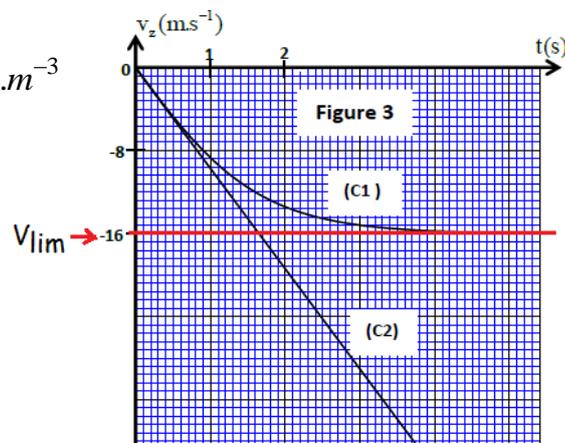
$$v_{lim} = -\sqrt{\frac{g \cdot R \cdot \rho_i}{0,165 \cdot \rho_{air}}} \quad \text{avec } R = 6\text{cm} \text{ et } \rho_2 = 94\text{Kg.m}^{-3}$$

$$\text{A.N : } v_{lim} = -\sqrt{\frac{9,8 \times 6 \cdot 10^{-2} \times 94}{0,165 \times 1,3}} \approx -16\text{m.s}^{-1}$$

- D'après la figure 3 ; la courbe (C<sub>1</sub>) a une limite finie :

$$v_{lim} = -16\text{m.s}^{-1}$$

- Donc La courbe (C<sub>1</sub>) correspond aux variations de la vitesse de la boule (b).

**3-2- La courbe (C'<sub>2</sub>) correspond aux variations de la côte de la boule (a) :**

La boule (a) a pour masse volumique  $\rho_1 = 1,14 \cdot 10^4 \text{Kg.m}^{-3}$  et celle de (b) est  $\rho_2 = 94 \text{Kg.m}^{-3}$ .  $\rho_2 \ll \rho_1$ . Or les deux boules ont le même volume  $V = (4/3) \cdot \pi \cdot R^3$ ; et que  $m = \rho \cdot V$  donc la boule (b) est plus légère que (a), alors cette dernière arrive la première au sol au bout de 3,7s contrairement à la boule (a) qui met 4,4s pour toucher le sol : cela montre que les variations de la côte z de (a) correspond à la courbe (C'<sub>2</sub>).

**4- \* La nature du mouvement de la boule (a) :**

La courbe (C<sub>2</sub>) est celle de la fonction linéaire  $v_z(t) = K \cdot t$  : le mouvement de (a) est rectiligne uniformément varié.

**\* Equation horaire z(t) :**

$$\text{On a : } v_z(t) = K \cdot t \quad \text{avec } K = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \frac{(-16) - 0}{1,65 - 0} \approx -9,7\text{m.s}^{-2}$$

Or  $\frac{dz}{dt} = v_z(t) = -9,7 \cdot t$  et par intégration et en tenant compte de la condition initiale  $z(0) = h$  :

$$\text{Alors : } z(t) = -4,85 \cdot t^2 + 69 \quad z(\text{en m}) \text{ et } t(\text{en s})$$

**5- La différence d'altitude d entre les centres d'inertie des deux boules à t<sub>1</sub> = 3,7s :**

$$d = \Delta z = z_b(t_1) - z_a(t_1) = 26 - 0 = 26\text{m}$$

**6- Détermination de a<sub>z</sub>(t<sub>n</sub>) et v<sub>z</sub>(t<sub>n+1</sub>) :**

- d'après l'énoncé :  $v_z(t_n) = -11,47\text{m.s}^{-1}$

- L'équation différentielle s'écrira :  $a_z(t_n) = -g + 0,165 \cdot \frac{\rho_{air}}{R \cdot \rho_i} \cdot v_z^2(t_n)$

$$\text{A.N : } a_z(t_n) = -9,8 + 0,165 \cdot \frac{1,3}{0,06 \times 94} \times (-11,47)^2 \approx -4,8\text{m.s}^{-2}$$

- L'équation d'Euler permet d'écrire :  $v_z(t_{n+1}) = v_z(t_n) + a_z(t_n) \cdot \Delta t$

**A.N :**  $v_z(t_{n+1}) = -11,47 + (-4,8) \times 0,125 \approx -12,10 \text{ m.s}^{-1}$

**PARTIE II :** *Etude du mouvement d'un pendule de torsion :*

**1- Equation différentielle vérifiée par l'abscisse  $\theta(t)$  du pendule :**

- Système à étudier : {la tige MN}

- Repère d'étude R (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ) supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

\* Poids de la tige :  $\vec{P}$

\* Action du fil de torsion :  $\vec{T}$

\* Action du couple de torsion de moment :  $M_c = -C \cdot \theta$

- La relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M_c = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad \text{avec} \quad M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$$

- On aboutit à la relation demandée :

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \cdot \theta = 0$$

**2-1- Montrons que  $\dot{\theta}(t) = 4 \cdot \sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$  :**

- Les fonctions horaires  $\theta(t)$  et  $\dot{\theta}(t)$  ont la même période  $T_0$  :

- D'après la figure 5, la période est :

$$T_0 = 1,25 \text{ s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2}{1,25} \cdot \pi = 1,6\pi$$

- La vitesse angulaire maximale  $\dot{\theta}_m$  :

On a la solution de l'équation est :  $\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

Alors la vitesse angulaire à l'instant t est :  $\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = -\dot{\theta}_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

On en déduit que :  $\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \theta_m = 1,6 \times \pi \times \frac{\pi}{4} = 4 \text{ rad.s}^{-1} \quad (\pi^2 \approx 10)$

- La phase  $\varphi$  à l'instant t = 0 :  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0) = -\dot{\theta}_m \cdot \sin(\varphi) = -\frac{\dot{\theta}_m}{2} < 0$  alors  $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$

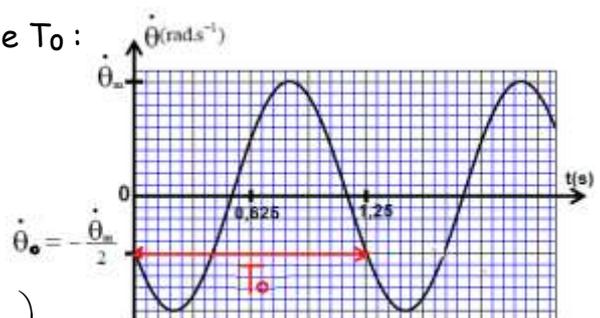
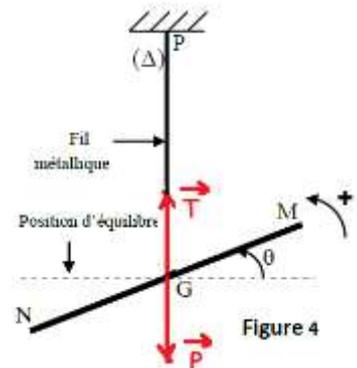


Figure 5

On en déduit que :  $\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

Finalement on peut écrire :  $\dot{\theta}(t) = -4 \cdot \sin\left(1,6 \cdot \pi t + \frac{\pi}{6}\right)$  or  $-\sin\left(1,6 \cdot \pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left((1,6 \cdot \pi t + \frac{\pi}{6}) + \pi\right)$

Donc la solution est :  $\dot{\theta}(t) = 4 \cdot \sin\left(1,6 \cdot \pi t + \frac{7 \cdot \pi}{6}\right)$

**2-2- La valeur de la constante de torsion C du fil :**

On sait que :  $\frac{C}{J_{\Delta}} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0}\right)^2$  alors  $C = J_{\Delta} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0}\right)^2$

**A.N :**  $C = 4 \cdot 10^{-4} \times \left(\frac{2 \cdot \pi}{1,25}\right)^2 = \underline{1,02 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}}$

**3- \* La valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur :**

$E_m = E_c + E_{pt} + E_{pp}$  avec  $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}^2$ ,  $E_{pt} = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2$  et  $E_{pp} = 0$

Alors  $E_m = \text{Cte}$  et  $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}_m^2$

**A.N :**  $E_m = \frac{1}{2} \times 4 \cdot 10^{-4} \times 4^2 = \underline{3,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$

**\* La valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates t = 0 :**

A l'instant t = 0 :  $E_m = E_c(0) + E_{pt}(0) \Rightarrow E_{pt}(0) = E_m - E_c(0)$

Donc  $E_{pt}(0) = E_m - \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}_0^2$  or  $\dot{\theta}_0 = -\frac{\dot{\theta}_m}{2}$

Alors :  $E_{pt}(0) = E_m - \frac{1}{8} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}_m^2$

**A.N :**  $E_{pt}(0) = 3,2 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{8} \times 4 \cdot 10^{-4} \times 4^2 = \underline{2,4 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$